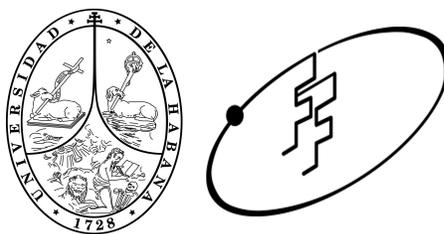


Universidad de La Habana
Facultad de Física



TESIS DE DIPLOMA

Enanas Blancas Magnetizadas

Autor: Diana Alvear Terrero

Tutores: Dra. Aurora Pérez Martínez, ICIMAF
Dr. Daryel Manreza Paret, Facultad de Física

La Habana, 2015

A abuela Niurka, que me ayudó a escribir estas líneas, y al resto de mi gran familia, por su apoyo incondicional.

A mis tutores, Aurorita y Daryel, que me introdujeron en la física de los Objetos Compactos. A Hugo Pérez y el resto de la familia del ICIMAF. Gracias por su acogida, su dedicación y su ejemplo.

A mis compañeros de grupo y amigos, por la ayuda y las ideas que intercambiamos siempre.

A quienes de una forma u otra han hecho posible llevar a buen término este trabajo.

Resumen

El propósito de esta tesis es obtener ecuaciones de estado más realistas para describir la materia que forma a las enanas blancas magnetizadas, y resolver con ellas las ecuaciones de estructura de estos objetos compactos.

Las ecuaciones de estado se determinan teniendo en cuenta la aproximación de campo magnético débil $B < B_c$ ($B_c = 4,41 \times 10^{13}$ G) para el gas de electrones de la estrella. El campo magnético, aún para los valores moderados presentes en las enanas blancas, introduce presiones anisotrópicas. Además, consideramos la corrección a la energía y la presión debida a la interacción Coulombiana del gas de electrones con los iones localizados en una red cristalina. Al introducir esta corrección, disminuye la energía y la presión del sistema, efecto que se magnifica al emplear elementos químicos más pesados.

Por otra parte, se resuelven las ecuaciones de estructura de Tolman-Oppenheimer-Volkoff en simetría esférica de manera independiente para la presión perpendicular y la paralela, lo cual confirma que es necesario utilizar ecuaciones de estructura acordes a la axisimetría del sistema anisotrópico. Por tanto, estudiamos las soluciones de las ecuaciones de estructura en coordenadas cilíndricas. En este caso, se obtiene la masa por unidad de longitud en vez de la masa total de la enana blanca.

Índice general

Resumen	v
Índice general	vii
Introducción	1
1. Enanas blancas	5
1.1. Evolución estelar	5
1.2. Características	8
1.3. Campos magnéticos en las enanas blancas	8
2. Propiedades termodinámicas para un gas degenerado de electrones	11
2.1. Tensor de energía-momento	11
2.2. Potencial termodinámico a campo magnético cero	12
2.3. Ecuaciones de estado para campo magnético cero	13
2.4. Potencial termodinámico en presencia de campo magnético	14
2.4.1. Límite de campo magnético débil ($B < B_c$)	15
2.4.1.1. Contribución estadística	16
2.4.1.2. Contribución del vacío	17
2.5. Ecuaciones de estado en el régimen de campo magnético débil	17
3. Ecuaciones de estado para enanas blancas	19
3.1. Ecuaciones de estado en condiciones de equilibrio estelar	19
3.1.1. Enanas blancas	20
3.1.1.1. Ecuación politrópica	20
3.1.2. Enanas blancas magnetizadas en el régimen de campo débil ($B < B_c$)	21
3.2. Ecuaciones de estado para enanas blancas magnéticas con partículas interactuantes	22
4. Ecuaciones de estructura	26
4.1. Ecuaciones de Einstein	26
4.2. Simetría esférica: Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	27
4.2.1. Discusión de los resultados numéricos	28
4.3. Simetría cilíndrica	30
4.3.1. Discusión de los resultados numéricos	31

Conclusiones	33
Recomendaciones	35
Apéndices	35
A. Unidades y constantes físicas usadas	36
B. Contribución estadística del potencial termodinámico en el límite de campo magnético débil	37
Bibliografía	39

Introducción

A medida que una estrella brilla, pierde, en un tiempo finito, su reserva de energía nuclear. Cuando la ha agotado toda, sobreviene la llamada muerte estelar. En este momento, la presión del gas caliente en el interior no puede soportar el peso de la estrella y esta colapsa. El remanente estelar se conoce como objeto compacto (OC), y en dependencia de la masa de la progenitora, será una enana blanca (EB), una estrella de neutrones (EN) o un agujero negro (AN) .

Nuestra galaxia está poblada por miles de millones de enanas blancas, unos pocos cientos de millones de estrellas de neutrones y probablemente, cientos de miles de agujeros negros. De todos estos objetos, sólo una pequeña fracción se ha detectado hasta el momento: miles de enanas blancas, alrededor de 2 000 estrellas de neutrones y solo unas pocas docenas de agujeros negros [1, 2].

Los objetos compactos tienen densidades extremadamente altas, de 10^7 g cm^{-3} para las enanas blancas y $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ en el caso de las estrellas de neutrones¹, y son laboratorios naturales que no se pueden describir obviando alguna de las cuatro fuerzas de la naturaleza: la débil, la fuerte, la electromagnética y la gravitacional. Tales condiciones extremas no se han podido obtener en laboratorios terrestres. Luego, solo disponemos de observables astrofísicos para inferir las propiedades de objetos tan densos y masivos.

La primera enana blanca observada fue la compañera de Sirio A (Sirio en aquel entonces), cuando en 1844, el astrónomo Friedrich Bessel notó un ligero movimiento de vaivén, como si a su alrededor orbitara un objeto no visto. En 1863, Alvan Clark observó finalmente dicho objeto, que se identificó como una enana blanca, llamada Sirio B.

Para los físicos y astrónomos de principios del siglo XIX resultaba un desafío explicar qué fuerza estaba compensando la atracción gravitacional en un astro como Sirio B, tan pequeño y poco luminoso, pero tan masivo, ya que en un objeto así han cesado las reacciones de fusión, por lo que la presión térmica es muy débil y no puede contrarrestar la fuerza gravitacional.

La explicación a este enigma aparece con las teorías cuánticas y la formulación por Paul Dirac en 1926 de la estadística a la que obedecen los fermiones, bautizada posteriormente como *estadística de Fermi-Dirac*. Esta tiene en cuenta el Principio de exclusión de Pauli: dos fermiones (partículas idénticas e indistinguibles) no pueden ocupar el mismo estado cuántico. De este modo, en diciembre de 1926 R. H. Fowler [3] obtuvo que un gas de fermiones denso a temperatura cero es capaz de ejercer una presión no nula que puede entonces sostener el colapso.

En 1925, el espectro de Sirio B confirmó que es una estrella con aproximadamente la misma temperatura de Sirio A. Ambas están en órbita, una alrededor de la otra, y constituyen lo que se llama un sistema binario, lo cual permitió que se determinaran sus masas usando la tercera Ley

¹La densidad media de la Tierra es $5,514 \text{ g cm}^{-3}$ y la densidad nuclear es $2,04 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$.

de Kepler, resultando masas de $2,3M_{\odot}$ y $1M_{\odot}$ ⁱⁱ para Sirio A y B, respectivamente. También se obtuvo un diámetro de 10 000 km para Sirio B, mientras que el de Sirio A es 1 000 000 km. Estas mediciones se refinaron con la ayuda del telescopio espacial Hubble en el 2005, siendo el diámetro obtenido para Sirio B de 12 000 kmⁱⁱⁱ y la masa de $0,98M_{\odot}$, en concordancia con los resultados previos.

Por otra parte, el descubrimiento del neutrón por James Chadwick en 1932 [4], condujo a Walter Baade y Fritz Zwicky a proponer la existencia de ENs en 1934 [5]. Esta idea alcanzó relevancia en 1967, con el azaroso descubrimiento por Jocelyn Bell y Antony Hewish de la primera fuente de radio (Pulsar, del inglés *pulsating star*), en el Radio Observatorio de Cambridge [6].

Las enormes densidades concentradas en espacios muy pequeños de los objetos compactos, hacen que para estudiar su equilibrio hidrodinámico y describirlos se requiera la Teoría General de la Relatividad (TGR), tomando la presión del gas degenerado de electrones/neutrones como la que compensa la presión gravitacional. La aplicación de la TGR, conduce a la existencia de valores máximos para las masas de estos objetos.

En las EBs el límite máximo para la masa es de $1,44M_{\odot}$, y se conoce como masa de Chandrasekhar [7]. Más allá de este valor, la presión degenerada del gas de electrones no puede compensar la presión gravitacional. Además, tienen radios $R \lesssim 1\,000$ km y densidades de $(10^7 - 10^8)$ g cm⁻³. Estas características, junto con la baja luminosidad, hacen que las enanas blancas sean difíciles de detectar y que se ubiquen a la izquierda de la secuencia principal en el Diagrama de Hertzsprung-Russell (ver Sección 1.1). Por otra parte, muchas EBs se localizan en sistemas binarios, en los que se deposita material de la estrella compañera en un disco de acreción alrededor de la enana blanca, lo cual da origen a las Supernovas Tipo Ia.

Asimismo, para las ENs se encuentran soluciones de masas entre $1,44M_{\odot}$ y $2M_{\odot}$, radios entre 10 km y 20 km [8] y densidades que varían en el rango de $(10^7 - 10^{15})$ g cm⁻³, siendo los objetos más densos en el universo. No son visibles con telescopios ópticos y por tanto no podemos representarlas en el Diagrama de Hertzsprung-Russell (ver Sección 1.1).

En los últimos 20 años se ha recopilado una gran cantidad de datos observacionales de los objetos compactos gracias a la construcción de radiotelescopios, el desarrollo de los satélites y de instrumentos de detección de radiación X y gamma para colocarlos en ellos.

En la Tierra podemos mencionar una serie de radiotelescopios, el VLA (*Very Large Array*) en Estados Unidos, el RTGM (Radio Telescopio Gigante en Metro-ondas) en la India, el ATCA (*Australia Telescope*), el ALMA (*Atacama Large Millimeter Array*), y el SKA (*Square Kilometer Array*). Destacan también, los experimentos de sondeo del espacio como el *Hamburg/ESO Quasar Survey*, el *Edinburgh-Cape survey* y el *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).

El observatorio en satélite más conocido es el Telescopio Espacial Hubble (TEH), puesto en órbita el 24 de abril de 1990 como un proyecto conjunto de la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) y de la ESA (*European Space Agency*), que puede captar radiación en el visible, en el infrarrojo próximo y en el ultravioleta. El TEH ha tomado, por ejemplo, numerosos datos de supernovas, enanas blancas y estrellas de neutrones. Su papel ha sido decisivo en la “cacería” de Supernovas tipo Ia.

Actualmente se dispone además de un conjunto de observatorios como el Observatorio de Rayos X Chandra y el Observatorio de Rayos Gamma Compton, que se encuentran en órbita al igual

ⁱⁱ M_{\odot} es la masa de Sol (ver Tabla A.2).

ⁱⁱⁱComparable con el diámetro de la Tierra: 12 742 km.

que el Hubble. Ellos están en una posición clave para obtener nuevas imágenes de alta resolución espectral y estudiar objetos compactos en sistemas aislados, binarios y en las regiones de galaxias que muestran actividad energética inusual (AGN, en inglés *Active galactic nucleus*).

La presencia de elevados campos magnéticos caracteriza también a los objetos compactos. Las observaciones permiten inferir los campos magnéticos superficiales, pero no son capaces de estimar los valores en el interior. A las EBs se les atribuye campos magnéticos entre 10^3 G y 10^9 G [9]^{IV} en la superficie; en tanto para las ENs, se asocian campos magnéticos superficiales de 10^{12} G a los llamados radio pulsares y de 10^{15} G a las nombradas Magnetars (*Magnetic Stars*-Estrellas Magnéticas) [10].

Los valores de hasta 10^{12} G pueden ser explicados por la amplificación del campo magnético de las estrellas progenitoras después de la explosión de la Supernova [10]. Sin embargo, intensidades mayores, en particular los campos magnéticos asociados a las Magnetars, precisan de modelos más elaborados que aún están en discusión [11]. Uno de ellos es el efecto dinamo: basado en la circulación del gas por convección dentro de la estrella.

Los campos magnéticos intensos modifican el comportamiento de la materia a escala microscópica y con ello la estructura estelar. Un estimado teórico de los valores máximos de los campos magnéticos que podrían llegar a tener estos objetos en el interior puede darse a través del teorema escalar del Virial [12, 13]. Esto significa equiparar la energía gravitacional con la magnética. Para EBs encontramos que los campos magnéticos estimados para masas de $M = 1,1M_{\odot}$ y radios de $R = 0,02R_{\odot}$, son como máximo de aproximadamente 10^{12} G; en tanto para ENs encontramos que si la masa es $M = 1,44M_{\odot}$ y el radio $R = 10^6$ cm = $10^{-4}R_{\odot}$, se obtiene un campo magnético máximo del orden de 10^{18} G.

Recientemente, han sido reportadas observaciones de supernovas tipo Ia SN 2006gz, SN 2007if, SN 2009dc, SN 2003fg con valores de luminosidad muy elevados y baja energía cinética [14]. Estas supernovas han tratado de ser explicadas [15–17] a partir EBs progenitoras con masas mayores que el límite de Chandrasekhar impuesto por la teoría.

En particular, se ha asociado la presencia de campos magnéticos fuertes ($10^{14} - 10^{15}$) G en las EBs, como la causa de que lleguen a tener masas mayores que las de Chandrasekhar [15]. Teniendo en cuenta que estos modelos fueron construidos ignorando aspectos microfísicos y macrofísicos esenciales, en [18] y [19] han sido descartados.

La motivación de esta tesis parte del intento de estudiar el papel que juega la presencia de campos magnéticos en las enanas blancas y construir modelos más realistas, tanto para las ecuaciones de estado como para las ecuaciones de estructura de las EBs magnetizadas.

Para ello, nos hemos propuesto:

- Estudiar una ecuación de estado que describa de manera más realista una EB magnetizada, considerando no solo el papel del campo magnético, sino también la presencia de la interacción de los electrones y los iones, que forman una red cristalina. Esto presupone considerar el plasma de electrones e iones de la estrella en presencia de campo magnético. Usaremos el límite de campo débil $B < B_c$ ($B_c = 4,41 \times 10^{13}$ G), ya que los campos magnéticos inferidos para EBs son de hasta 10^9 G en la superficie y 10^{12} G en el interior.
- Resolver las ecuaciones de estructura de dichos objetos en el marco de la Teoría General de la Relatividad, lo cual nos permite obtener los observables macroscópicos: masas y radios.

^{IV}El campo magnético terrestre es de 0,5 G.

Analizaremos las soluciones de las ecuaciones de estructura para simetría tanto esférica como cilíndrica. Esta última es más realista debido a la anisotropía en las presiones que introduce el campo magnético.

La tesis complementa y le da continuidad al trabajo [20], donde se estudió tanto las ecuaciones de estado como las de estructura para una EB magnetizada. El gas magnetizado degenerado de electrones en [20] fue considerado libre y no se tomaron en cuenta las interacciones con los iones. Partiremos tal y como se hizo en [20], de suponer que el campo magnético que existe en la estrella es dipolar y constante. No pretendemos abordar los mecanismos que lo producen ni sus orígenes.

La validez de la aproximación de campo magnético constante se debe a que, aunque la intensidad del campo magnético varía algunos órdenes desde el núcleo de la estrella a la superficie, la escala de variación del mismo dentro de la estrella es mucho mayor que la variación de la escala del campo magnético microscópico [21]. Es decir, la escala microscópica magnética está dada por la longitud magnética $l_m \sim 1/eB$ y se satisface ampliamente que $R \gg l_m$, donde R es el radio de la estrella y tiene un valor aproximado de 1 000 km (20 km), para EBs (ENs).

Hemos organizado la tesis en cuatro capítulos, dos apéndices y finalmente, las conclusiones y recomendaciones y la bibliografía. Los resultados originales de la tesis y las contribuciones del autor a la temática se incluyen en los Capítulos 3 y 4.

- El Capítulo 1, a modo introductorio, presenta las características fundamentales de la enanas blancas y las enanas blancas magnetizadas.
- En el Capítulo 2, partiendo del tensor de energía-momento de un gas degenerado de electrones en ausencia y presencia de campo magnético, se obtienen las propiedades termodinámicas correspondientes.
- En el Capítulo 3, se analizan las ecuaciones de estado anisotrópicas para enanas blancas no magnéticas y enanas blancas magnetizadas en el límite de campo débil. Se considera además la inclusión de la interacción de los electrones con la red cristalina y se consideran distintas composiciones químicas.
- En el Capítulo 4, se utiliza las ecuaciones de estado previamente obtenidas para resolver las ecuaciones de estructura en simetría esférica, discutiendo el impacto de la anisotropía de las presiones en las relaciones masa-radio. Además, se resuelven las ecuaciones de estructura en simetría cilíndrica.

Capítulo 1

Enanas blancas

El estudio de la estructura de las enanas blancas entraña la creación de modelos en los que se tiene en cuenta las propiedades microfísicas de las mismas para construir ecuaciones de estado correspondientes. Una vez obtenidas las ecuaciones de estado, se resuelven las ecuaciones de estructura, cuya solución devuelve distintas configuraciones para los observables macroscópicos.

En este capítulo discutiremos de forma sintetizada el proceso de evolución estelar para estrellas de masa pequeña, así como las características principales de las enanas blancas y las enanas blancas magnéticas.

1.1. Evolución estelar

De manera general, la evolución estelar puede describirse como una lucha entre la fuerza gravitatoria, que desde la formación de una estrella a partir de una nebulosa, tiende a comprimirla; y la fuerza nuclear proveniente de las reacciones de fusión, fisión y desintegración radiactiva, que se opone a la contracción. Eventualmente el combustible nuclear se agota, y la estrella colapsa gravitacionalmente. Cómo se desarrolle específicamente este proceso, depende de las características de la estrella, particularmente de la masa y la composición.

Los elementos químicos presentes en una estrella determinan las líneas de absorción observadas en los espectros estelares, que se disponen en una secuencia continua según la intensidad de las líneas. A modo de clasificación, se designan los tipos O, B, A, F, G, K, L, M, y T, que conforman el llamado sistema de Harvard, desarrollado en el Observatorio de Harvard a inicios del siglo XX.

Inicialmente, dicha clasificación cubría desde las estrellas azules más calientes de tipo O hasta las más frías de clase M, pero posteriormente se le han ido añadiendo otras letras, como la T para las infrarrojas. Además, se utilizan los subíndices del 0 al 9 para indicar las sucesiones dentro de cada clase, donde A0 especifica las estrellas más calientes de la clase A, mientras que A9 se refiere a las más frías.

A partir del tipo espectral, la temperatura, y la ley de Stefan-Boltzmann $R \sim \sqrt{L}/T^2$ (siendo R el radio de la estrella, L su luminosidad y T la temperatura efectiva), vemos que dada una temperatura, las estrellas más luminosas tienen mayores dimensiones.

Esta relación se muestra en el Diagrama de Hertzsprung-Russell o Diagrama H-R (Figura 1.1), que fue desarrollado de manera independiente a inicios del siglo XX por Ejnar Hertzsprung y Henry

Norris Russell. El gráfico original de Hertzsprung mostraba la luminosidad de las estrellas en función de su color, en tanto el de Russel representaba la luminosidad contra la clase espectral.

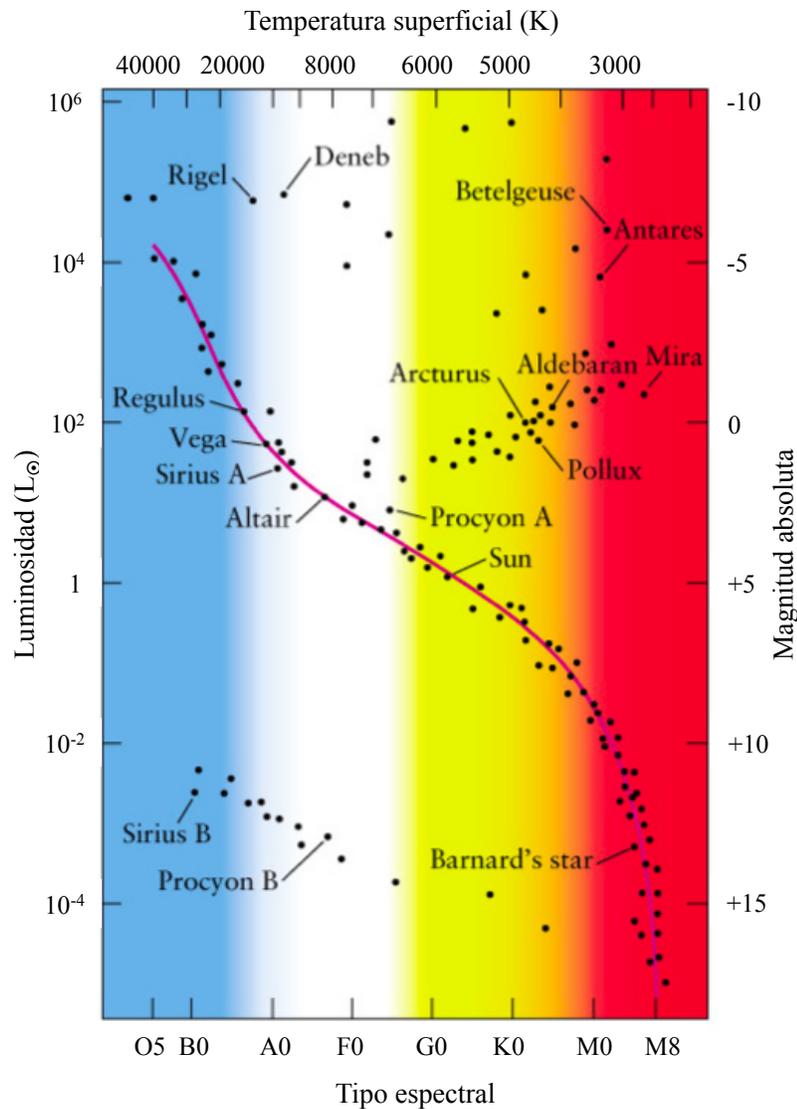


Figura 1.1: Diagrama H-R.

En la Figura 1.1 se observa que las estrellas se agrupan en regiones definidas, lo cual permite localizar, por ejemplo, las gigantes y las enanas blancas. La diagonal que va desde el extremo superior izquierdo hasta el inferior derecho se conoce como secuencia principal. La relación entre la luminosidad y el brillo en la secuencia principal indica que la posición de cada estrella depende de su masa.

En particular, el remanente luego de la llamada muerte estelar, está condicionado por la masa inicial de la estrella, como aparece en la Tabla 1.1. Los valores dependen de las observaciones y, aunque en general concuerdan con los tabulados, varían de un autor a otro.

Rango de masa aproximado	Resultado esperado
$0,08M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10M_{\odot}$	Enana blanca y nebulosa planetaria.
$10M_{\odot} \lesssim M \lesssim 25M_{\odot}$	Estrella de neutrones y supernova.
$25M_{\odot} \lesssim M \lesssim 60M_{\odot}$	Agujero negro y supernova o explosión de rayos gamma.

Tabla 1.1: Posibles destinos de las estrellas estables como función de la masa [10].

El ciclo de vida de las estrellas de masa pequeña como nuestro Sol (Figura 1.2) comienza fusionando hidrógeno. Cuando este elemento se agota, el núcleo se contrae sobre su propio peso y las capas externas se expanden formándose una gigante roja. Eventualmente, la temperatura del núcleo es suficientemente alta para que se inicien las reacciones de fusión del helio. Esto hace que la estrella se torne inestable, y causa que se eyecten las capas exteriores formando una nebulosa planetaria. El núcleo remanente es una enana blanca.



Figura 1.2: Representación de la evolución de estrellas como el Sol.

Para estrellas de masas intermedias ($3M_{\odot} < M < 9M_{\odot}$), que terminan como enanas blancas de carbono y oxígeno, el proceso evolutivo es similar.

Las estrellas pueden encontrarse formando sistemas binarios, y en el caso de que uno de los componentes sea un OC, este puede interactuar con la otra estrella a través de un disco de acreción de masa. En un sistema binario con una EB, la acreción de masa por parte de esta puede llevarla a alcanzar la masa de Chandrasekhar. Los electrones y protones comienzan a reaccionar generando neutrones (neutronización), y la estrella colapsa produciendo una Supernova tipo Ia.

Este tipo de supernovas son muy importantes en las mediciones de distancias en el universo porque poseen una cantidad estándar de combustible y un mecanismo de explosión común (candelas estándar). Así, con mediciones de distancias basadas en las Supernovas tipo Ia se ha inferido la aceleración de la expansión del universo [22] y la presencia de energía oscura [23].

Por otra parte, las EBs sin fuentes de energía termonuclear se enfrían con el tiempo, a medida que

radían su energía residual. Eventualmente, se convierten en enanas negras, las cuales cristalizarán al final según la teoría. Como contienen predominantemente carbono, son nombradas “diamantes del Universo”.

1.2. Características

Las enanas blancas tienen típicamente masas medias de $0,663 M_{\odot}$ [24], siendo las más pequeñas del orden de $0,17 M_{\odot}$ [25], y las mayores aproximadamente $1,33 M_{\odot}$ [26]. Los radios característicos se estiman entre los $0,008 R_{\odot}$ y $0,02 R_{\odot}$, lo cual es comparable con el radio de la Tierra $R_T \sim 0,009 R_{\odot}$; y las densidades en el interior varían entre 10^4 g cm^{-3} y 10^9 g cm^{-3} , con densidad media 10^6 g cm^{-3} . Las temperaturas superficiales van desde 5 000 hasta 80 000 K.

Están formadas por una atmósfera de radio muy pequeño, por lo que puede despreciarse en los modelos; y un núcleo fundamentalmente de He, C y O, aunque pueden encontrarse elementos más pesados por efectos de acreción de masa, ya sea del medio interestelar o de una compañera. Su clasificación espectral se simboliza por la letra D (proveniente de *dwarf*, enana en inglés), seguida de una de las letras A, B, C, O, Z, Q, en dependencia de la composición de su atmósfera:

DA: atmósfera rica en hidrógeno, con líneas fuertes de HI (constituyen el 80 % de las EBs).

DB: atmósfera rica en helio, con líneas fuertes de HeI.

DC: espectro continuo.

DO: atmósfera rica en helio, con líneas fuertes de HeII.

DZ: líneas fuertes de metales (por ejemplo CaI, MgI, FeI, excluyendo al carbono).

DQ: líneas fuertes de carbono.

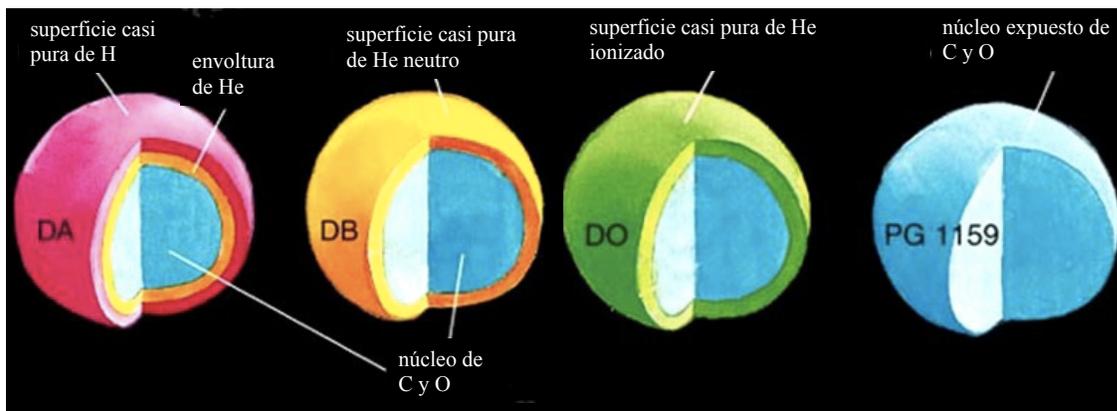


Figura 1.3: Composición y estructura de algunas clases de enanas blancas.

1.3. Campos magnéticos en las enanas blancas

En 1970, Kemp [27] demostró que la radiación proveniente de Grw+70°8247 [28] presentaba una fuerte polarización circular. Posteriormente, las líneas espectrales observadas fueron identificadas

como líneas de hidrógeno desplazadas por efecto Zeeman en un campo magnético de aproximadamente $(10^8 - 3,2 \times 10^8)$ G [29–31], por lo que fue clasificada como una enana blanca magnética (EBM).

Actualmente, el número de enanas blancas magnéticas aisladas descubiertas asciende a aproximadamente 250 con el campo magnético bien determinado y más de 600 si se cuenta los objetos donde el campo no se ha obtenido [32, y referencias encontradas en él].

También, existen sistemas binarios llamados variables cataclísmicas magnéticas (VCMs) compuestos por una EBM y una estrella de la parte inferior de la secuencia principal muy próximas entre sí, en los que la enana blanca presenta un campo magnético lo suficientemente fuerte como para afectar el disco de acreción. Estos sistemas se dividen en dos grupos, en dependencia de la intensidad del campo magnético: polares (estrellas de tipo AM Her) y polares intermedios (estrellas de tipo DQ Her).

Los polares se caracterizan porque el momento magnético de la EBM, del orden de 10^{33} G cm³ o mayor, es suficiente para que las estrellas roten de forma sincronizada con período orbital (70 – 480) min. En cambio, el momento magnético de la EBM en los polares intermedios es menor que en el caso de los polares, y no logra sincronizar la órbita de la EB con el período orbital del sistema. Hoy día, el número de VCMs listadas es de aproximadamente 170, aunque solo se tiene la intensidad del campo magnético para la mitad de ellas, la mayor parte en un rango de $(7 \times 10^6 - 2,3 \times 10^8)$ G.

La intensidad del campo magnético superficial en las EBMs, varía entre 10^3 G y 10^9 G, y distribuye según la Figura 1.4. La topología de los mismos puede llegar a ser bastante complicada, aunque suele asumirse una configuración dipolar [32, y referencias encontradas en él].

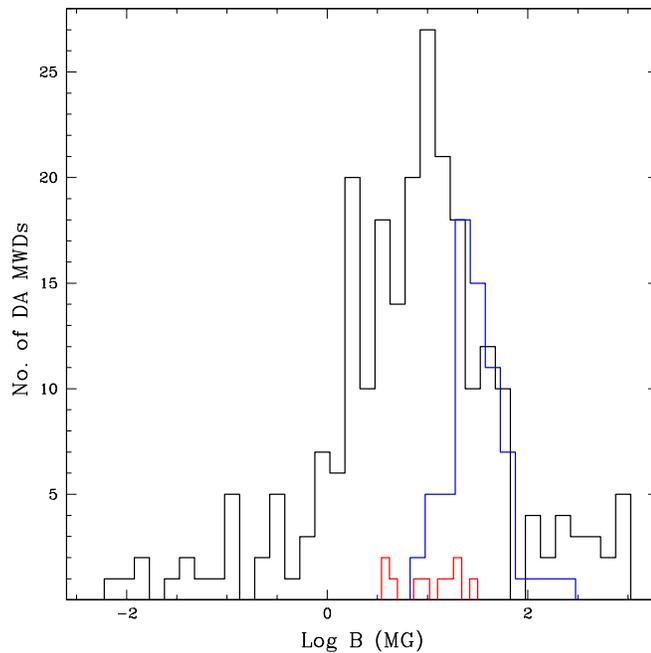


Figura 1.4: Distribución de la intensidad del campo magnético en EBMs aisladas (negro), polares (azul), y polares intermedios (rojo) [32].

Un resultado bien establecido es que las EBMs tienen masas mayores que las EBs que no presentan campos magnéticos, cuya masa promedio es $(0,663 \pm 0,136) M_{\odot}$. Para EBMs aisladas con campos mayores que 10^6 G, la distribución de masa tiene una masa media de $(0,784 \pm 0,047) M_{\odot}$ y exhibe una cola que se extiende hasta el límite de Chandrasekhar (Figura 1.5).

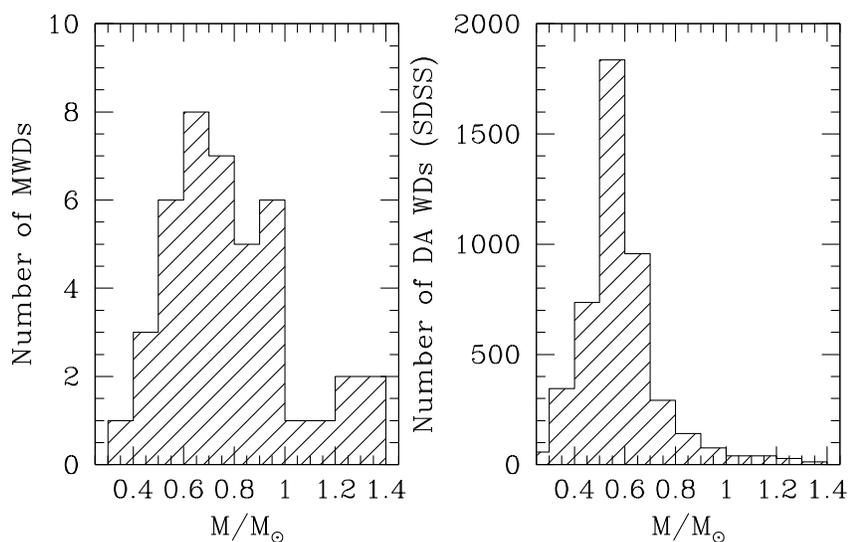


Figura 1.5: Distribución de masa para EBMs [33], y EBs no magnéticas [34].

Capítulo 2

Propiedades termodinámicas para un gas degenerado de electrones

Las propiedades del gas degenerado de electrones han sido extensamente estudiadas [10, 35]. Estas son extremadamente importantes cuando se estudia las enanas blancas, ya que es la presión de dicho gas lo que impide el colapso gravitacional de la estrella.

En este capítulo, partiendo del tensor de energía-momento, describimos las propiedades termodinámicas de un gas de electrones, tanto en ausencia como en presencia de campo magnético, obteniendo ecuaciones de estado apropiadas en cada caso. En particular, cuando el campo magnético es distinto de cero, se analiza la anisotropía que este produce en las ecuaciones de estado.

2.1. Tensor de energía-momento

En aras de describir las propiedades termodinámicas del gas de electrones consideraremos inicialmente el tensor de energía-momento de un gas de fermiones cargados en presencia de un campo magnético, cuya obtención siguiendo los métodos tradicionales de la teoría cuántica de campos a temperatura finita [36–38], presentamos de forma resumida.

Partiremos de la definición:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} A_{\mu,\nu} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.1)$$

donde

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [(i\partial_\mu - eA_\mu) \gamma_\mu - m] \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

es la densidad Lagrangiana de Dirac, γ_μ las matrices de Dirac, ψ el campo fermiónico, A_μ el potencial del campo electromagnético, $F_{\mu\nu}$ el tensor dual de Maxwell, m la masa del electrón y e la carga del mismo.

El tensor de energía-momento macroscópico es el promedio estadístico $T_{\mu\nu} = \langle \mathcal{T}_{\mu\nu} \rangle$, donde se tiene en cuenta que el potencial termodinámico Ω pasa a ocupar formalmente el lugar de la densidad Lagrangiana:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \langle e^{\int_0^\beta dx_4 \int d^3x \mathcal{L}(x_4, \vec{x})} \rangle, \quad (2.3)$$

siendo β el inverso de la temperatura absoluta T . Los detalles de estos cálculos pueden verse en [38].

Entonces, el tensor de energía-momento toma la forma [38]:

$$T_{\mu\nu} = \left(T \frac{\partial \Omega}{\partial T} + \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) \delta_{4\mu} \delta_{\nu 4} + 4F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial F^2} - \Omega \delta_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

donde μ es el potencial químico de los electrones y positrones.

Como es conocido [36], en un sistema de referencia comóvil con el gas, el tensor de energía-momento tiene forma diagonal, y las presiones se obtienen de las componentes diagonales espaciales del mismo, T_{11} , T_{22} , y T_{33} , mientras que la densidad de energía proviene de la componente T_{44} . Si el sistema está en presencia de un campo magnético \vec{B} orientado en la dirección x_3 ($x_\mu = (x_4, \vec{x})$) las componentes no nulas del tensor (2.4) [38, 39] toman la forma:

$$T_{44} = E = TS + \mu N + \Omega, \quad (2.5a)$$

$$T_{11} = T_{22} = P_\perp = -\Omega - B\mathcal{M}, \quad (2.5b)$$

$$T_{33} = P_\parallel = -\Omega. \quad (2.5c)$$

Las magnitudes E , N y \mathcal{M} son respectivamente la densidad de energía, la densidad de partículas y la magnetización. Además, en estas expresiones aparece una presión en la dirección paralela P_\parallel y otra en la perpendicular P_\perp al campo magnético, debido a la ruptura de la simetría rotacional $O(3)$ que introduce B .

En el límite de campo magnético cero, se recupera la forma del tensor del fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = P\delta_{\mu\nu} - (P + E)\delta_{4\mu} \delta_{\nu 4}, \quad (2.6)$$

cuyas componentes no nulas espaciales se corresponden con la presión y la T_{44} es la energía:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = P = -\Omega, \quad (2.7a)$$

$$T_{44} = -E = -TS - \mu N - \Omega, \quad (2.7b)$$

Es importante destacar que la contribución de Maxwell $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, también da lugar a presiones anisotrópicas $P_\perp = -P_\parallel = P_M = B^2/8\pi$ con densidad de energía $\varepsilon = P_M$ [40]. No obstante, a densidades de energía típicas de las enanas blancas $E \sim (10^{-7} - 10^{-3}) \text{ MeV fm}^{-3}$, los efectos de P_M no serán notables para campos magnéticos $B < 10^{14} \text{ G}$, por lo que no tendremos en cuenta este término [41].

Para obtener las presiones y la energía, tenemos que calcular el potencial termodinámico del sistema. A continuación, determinamos el potencial en ausencia de campo magnético ($B = 0$), con el que se obtienen las ecuaciones de estado correspondientes; y luego realizamos el mismo procedimiento para el campo magnético diferente de cero ($B \neq 0$).

2.2. Potencial termodinámico a campo magnético cero

Con el objetivo de obtener las propiedades termodinámicas del gas de electrones partiremos de la expresión general para el potencial termodinámico:

$$\Omega(\mu, T, 0) = \frac{1}{\beta V} \text{Tr} \ln Z = \frac{1}{\beta V} \sum_{p_4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \det G^{-1}(\vec{p}) \quad (2.8)$$

siendo Z la función de partición del ensemble gran canónico y $G^{-1}(\bar{p})$ el propagador fermiónico en el espacio de los momentos:

$$G^{-1}(\bar{p}) = [\bar{p} \cdot \gamma - m], \quad (2.9)$$

donde $\bar{p} = (ip_4 - \mu, p_1, p_2, p_3)$. La traza y el logaritmo en (2.8) se toman en el sentido funcional, quedando entonces:

$$\Omega(\mu, T, 0) = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{p_4} \ln [(p_4 + i\mu)^2 + \epsilon^2], \quad (2.10)$$

con el espectro:

$$\epsilon = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (2.11)$$

Partiendo de la ecuación (2.10), realizamos la suma por p_4 siguiendo el procedimiento de Matsubara [42]:

$$p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.12)$$

y obtenemos el potencial termodinámico del sistema:

$$\Omega(\mu, T, 0) = -\frac{1}{4\pi^2\beta} \int d^3p \ln \left[\left(1 + e^{\beta(\epsilon+\mu)}\right) \left(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)}\right) \right], \quad (2.13)$$

donde $[(1 + e^{(\epsilon \mp \mu)\beta})]^{-1}$ son las distribuciones asociadas a las partículas y antipartículas respectivamente.

Si tenemos en cuenta que las temperaturas típicas de las enanas blancas (10^7 K $\sim 10^{-3}$ MeV), son mucho menores que la temperatura de Fermi $T_F = 10^9$ K ($T/T_F = 10^{-2} \ll 1$), se justifica tomar el límite degenerado $T = 0$ ($\beta \rightarrow \infty$). En este caso, el potencial termodinámico toma la forma:

$$\Omega(\mu, 0, 0) = -\frac{1}{4\pi^3} \int d^3\vec{p} \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right), \quad (2.14)$$

donde la contribución de los positrones se hace cero y la función de distribución de los electrones se transforma en la función paso unitario $\Theta(\mu - \epsilon)$:

$$\Theta(\mu - \epsilon) = \begin{cases} 1, & \mu > \epsilon; \\ 0, & \mu < \epsilon. \end{cases}$$

Al resolver la integral planteada en (2.14) como se explica en el Apéndice B, resulta:

$$\Omega(\mu, 0, 0) = -\frac{m^4}{4\pi^2} \left[\frac{\mu\sqrt{\mu^2 - m^2}}{3m^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} \right) \right]. \quad (2.15)$$

2.3. Ecuaciones de estado para campo magnético cero

A partir de la expresión (2.15) para el potencial termodinámico, podemos hallar todas las magnitudes termodinámicas del sistema. En particular la densidad de partículas:

$$N(\mu, 0, 0) = -\frac{d\Omega(\mu, 0, 0)}{d\mu}, \quad (2.16)$$

$$N(x, 0, 0) = \frac{m^3}{3\pi^2} x^3, \quad (2.17)$$

donde hemos introducido el momentum de Fermi adimensional $x = p_F/m$, con $p_F = \sqrt{\mu^2 - m^2}$.

Luego, obtenemos la energía y la presión del sistema:

$$E(\mu, 0, 0) = \Omega(\mu, 0, 0) + \mu N(\mu, 0, 0), \quad (2.18a)$$

$$P(\mu, 0, 0) = -\Omega(\mu, 0, 0), \quad (2.18b)$$

cuyas expresiones determinan la ecuación de estado.

En función del momento de Fermi, la ecuación (2.18a) se transforma en:

$$E(x, 0, 0) = m^4 \chi(x), \quad (2.19a)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[x\sqrt{x^2+1} (2x^2+1) - \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \right], \quad (2.19b)$$

y (2.18b) en:

$$P(x, 0, 0) = m^4 \Phi(x), \quad (2.20a)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[x\sqrt{x^2+1} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) + \ln(\sqrt{x^2+1}+x) \right]. \quad (2.20b)$$

Para **electrones relativistas** ($x \gg 1$), se puede desarrollar las funciones $\chi(x)$ y $\Phi(x)$ en serie de potencias de x en torno a infinito, quedando:

$$\chi(x) = \frac{1}{4\pi^2} \left[x^4 + x^2 - \frac{1}{2} \ln(2x) + \frac{1}{8} + \dots \right], \quad (2.21a)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{12\pi^2} \left[x^4 - x^2 + \frac{3}{2} \ln(2x) - \frac{7}{8} + \dots \right]. \quad (2.21b)$$

Por otra parte, para los **electrones no relativistas** ($x \ll 1$), es posible proceder expresando $\chi(x)$ y $\Phi(x)$ como una serie de potencias de x en torno a cero:

$$\chi(x) = \frac{1}{3\pi^2} \left[x^3 + \frac{3}{10}x^5 - \frac{3}{56}x^7 + \dots \right], \quad (2.22a)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{15\pi^2} \left[x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 + \dots \right]. \quad (2.22b)$$

2.4. Potencial termodinámico en presencia de campo magnético

Consideremos un gas de electrones magnetizado a temperatura finita. En presencia de un campo magnético constante \vec{B} dirigido según el eje x_3 . Podemos decir que el gas de electrones magnetizado experimenta tres cambios importantes:

1. El propagador fermiónico se modifica siendo $G_l^{-1}(\vec{p})$, con $\vec{p} = (ip_4 - \mu, 0, \sqrt{2eBl}, p_3)$. Consecuentemente la relación de dispersión de los electrones [36, 43] que resulta de resolver la ecuación de Dirac:

$$\epsilon_l = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBl}, \quad (2.23)$$

muestra cuantización de Landau de las frecuencias ciclotrónicas. Hemos designado con l los niveles de Landau.

2. La densidad de estados se vuelve proporcional al campo magnético de manera que la integral por los momenta en (2.13) se transforma según:

$$2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \longrightarrow 2 \sum_{l=0}^{\infty} g(l) \int \frac{eB}{(2\pi)^2} dp_3, \quad (2.24)$$

donde $g(l) = (2 - \delta_{l0})$ considera la doble degeneración del espín para todos los niveles de Landau excepto el $l = 0$.

3. Como ya vimos en la Sección 2.1, se rompe la simetría rotacional $O(3)$, dando lugar a anisotropías en el tensor de energía-momentum. Esto produce una separación de la presión en dos componentes distinguibles: una a lo largo del campo (la presión paralela) y otra en la dirección transversal (la presión perpendicular). Como resultado, las ecuaciones de estado son anisotrópicas.

Por consiguiente, el potencial termodinámico toma la forma:

$$\Omega(\mu, T, B) = -\frac{eB}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \sum_{l=0}^{\infty} g(l) \left\{ \epsilon_l + \frac{1}{\beta} \ln \left[\left(1 + e^{\beta(\epsilon_l + \mu)} \right) \left(1 + e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} \right) \right] \right\}. \quad (2.25)$$

En la ecuación (2.25), se pueden identificar dos términos: la contribución del vacío (2.26a), y la parte originada por el efecto estadístico del gas de electrones (2.26b) que depende de μ , T y B .

$$\Omega_{\text{vac}}(0, 0, B) = -\frac{eB}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \sum_{l=0}^{\infty} g(l) \epsilon_l, \quad (2.26a)$$

$$\Omega_{\text{est}}(\mu, T, B) = -\frac{eB}{4\pi^2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \sum_{l=0}^{\infty} g(l) \ln \left[\left(1 + e^{\beta(\epsilon_l + \mu)} \right) \left(1 + e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} \right) \right]. \quad (2.26b)$$

Por tanto,

$$\Omega(\mu, T, B) = \Omega_{\text{vac}}(0, 0, B) + \Omega_{\text{est}}(\mu, T, B). \quad (2.27)$$

Como argumentamos en la Sección (2.2), nuestro interés es modelar enanas blancas magnetizadas. Para ellas, la aproximación del gas degenerado es suficiente, de manera que el término estadístico del potencial (2.27) queda:

$$\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) = -\frac{eB}{4\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 (\mu - \epsilon_l) \Theta(\mu - \epsilon_l) \quad (2.28)$$

2.4.1. Límite de campo magnético débil ($B < B_c$)

Se define el campo magnético crítico de Schwinger $B_c = m^2/e = 4,41 \times 10^{13}$ G, como el campo magnético a partir del cual la energía ciclotrónica de los electrones eB/m^2 es comparable con su masa en reposo. Este valor permite determinar dos regímenes: el llamado límite de campo magnético débil ($B < B_c$), y el límite de campo magnético fuerte $B > B_c$.

Recordando que los campos magnéticos superficiales de las EBs están entre 10^3 G y 10^9 G, y que el valor del campo magnético en el centro de estas estrellas según el teorema del Virial escalar puede llegar hasta 10^{12} G, en nuestro estudio tomaremos el límite de campo magnético débil.

2.4.1.1. Contribución estadística

En la aproximación de campo magnético débil ($B < B_c$), la separación entre los niveles de Landau ($\sim eB$) es pequeña. Por tanto, podemos considerar el espectro discreto (2.23) como un continuo, y reemplazar la suma en l por una integral mediante la fórmula de Euler-MacLaurin [44]:

$$eB \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) f(2eBl) \approx \int_0^{\infty} (2eB) f(2eBl) dl + (eB) f(\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2eB)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \left[f^{2k-1}(\infty) - f^{2k-1}(0) \right], \quad (2.29)$$

donde el potencial se expresa como función de las potencias del campo magnético, y hemos definido:

$$f(2eBl) = \left(\mu - \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBl} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBl} \right). \quad (2.30)$$

La validez de esta aproximación se ilustra en la Tabla 2.1. En ella calculamos el número máximo de niveles de Landau como función del campo magnético y el potencial químico:

$$l_{max} = \text{I} \left[\frac{\mu^2 - m^2}{eB} \right]. \quad (2.31)$$

Se denota como $\text{I}[x]$ la función parte entera de x . Este nivel máximo se obtiene al tener en cuenta que el momentum de Fermi debe ser positivo en la expresión del potencial $\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B)$ [39].

μ (MeV)	l_{max}			
	$B = 5 \times 10^{10}$ G	$B = 5 \times 10^{11}$ G	$B = 5 \times 10^{12}$ G	$B = 10^{13}$ G
0,722663	2 200	219	22	2
1,61592	19 800	1 979	198	19
2,6056	55 000	5 499	550	55
3,61332	107 800	10 779	1 078	107
4,6273	178 200	17 819	1 782	178
5,64418	266 200	26 619	2 662	266
6,66262	371 800	37 179	3 718	371
7,68201	495 000	49 499	4 950	495
8,70202	635 800	63 579	6 358	635
9,72244	794 200	79 419	7 942	794
10,2328	880 000	87 999	8 800	880

Tabla 2.1: Nivel de Landau máximo para valores de μ y B dados. En la aproximación de campo magnético débil ($B < B_c$), hay suficientes niveles como para justificar el uso de la fórmula de Euler-MacLaurin para transformar la suma por los niveles de Landau en una integral.

Procediendo como se explica en el Apéndice B, obtenemos la parte estadística del potencial termodinámico del gas degenerado de electrones en presencia de campo magnético:

$$\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) = \Omega(\mu, 0, 0) + \Omega_B, \quad (2.32)$$

donde el término asociado al campo magnético tiene la forma:

$$\Omega_B = -\frac{m^4}{12\pi^2} \left[\frac{B}{B_c} \right]^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} \right). \quad (2.33)$$

2.4.1.2. Contribución del vacío

Retomemos el potencial (2.25). El término de vacío (2.26a) presenta una divergencia ultravioleta no dependiente del campo magnético que se evita mediante una renormalización (ver el procedimiento detallado en [36]).

Después de renormalizar, queda la bien conocida expresión de Schwinger [45]:

$$\Omega_{\text{vac}}(0, 0, B) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp(-m^2 s) \left(esB \coth(esB) - 1 - \frac{1}{3}(esB)^2 \right), \quad (2.34)$$

que en el límite de campo magnético débil es calculada en [46] y se reduce a:

$$\Omega_{\text{vac}}(0, 0, B) = \frac{m^4}{90(2\pi)^2} \left(\frac{B}{B_c} \right)^4. \quad (2.35)$$

Teniendo en cuenta que estamos considerando la aproximación de campo magnético débil ($B < B_c$), podemos notar que $\Omega_{\text{vac}}(0, 0, B) \ll \Omega_B$. Consecuentemente, el término dominante en este régimen de campo magnético es el estadístico, y el de vacío será despreciado en nuestros cálculos.

2.5. Ecuaciones de estado en el régimen de campo magnético débil

Considerando el potencial termodinámico (2.32) del sistema, las ecuaciones de estado quedan:

$$E(\mu, 0, B) = \Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) + \mu N(\mu, 0, B), \quad (2.36a)$$

$$P_{\parallel}(\mu, 0, B) = -\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B), \quad (2.36b)$$

$$P_{\perp}(\mu, 0, B) = -\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) - B\mathcal{M}(\mu, 0, B). \quad (2.36c)$$

donde la densidad de partículas y la magnetización se determinan según:

$$N(\mu, 0, B) = -\frac{\partial \Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B)}{\partial \mu}, \quad (2.37)$$

$$\mathcal{M}(\mu, 0, B) = -\frac{\partial \Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B)}{\partial B}, \quad (2.38)$$

En función del momento de Fermi adimensional, tenemos:

$$N(x, 0, B) = N(x, 0, 0) + N_B, \quad (2.39)$$

$$N_B = \frac{m^3}{12\pi^2} \left[\frac{B}{B_c} \right]^2 \frac{1}{x}, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{M}(x, 0, B) = \frac{m^4}{6\pi^2} \frac{B}{B_c^2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right). \quad (2.41)$$

Luego, sustituyendo la forma explícita del potencial termodinámico Ω_{est} , la densidad de partículas N y la magnetización \mathcal{M} dadas por las expresiones (2.32), (2.39) y (2.41) respectivamente, podemos escribir las ecuaciones de estado, en función del momento de Fermi adimensional:

$$E(x, 0, B) = E(x, 0, 0) + \left(\Omega_B + m N_B \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad (2.42a)$$

$$P_{\parallel}(x, 0, B) = P(x, 0, 0) - \Omega_B, \quad (2.42b)$$

$$P_{\perp}(x, 0, B) = P(x, 0, 0) + \Omega_B. \quad (2.42c)$$

Nótese que las expresiones anteriores muestran la energía y presiones como la suma de un término no dependiente del campo magnético y otro que sí es función de este.

Capítulo 3

Ecuaciones de estado para enanas blancas

Las ecuaciones de estado constituyen una parte fundamental en los estudios astrofísicos sobre objetos compactos. Describen la microfísica del sistema a partir de la relación entre la presión y la densidad de masa o la densidad de energía del sistema, lo cual indica cuánto resiste la materia en cuestión ante una compresión. En este sentido, los modelos para caracterizar la estructura de dichos objetos compactos se nutren de ellas para completar la información que aportan a las ecuaciones de equilibrio hidrodinámico.

Este capítulo abarca la parte original de la tesis, pues introduce la corrección electrostática debida a la interacción entre las partículas, electrones e iones, que componen la enana blanca, y la no uniformidad en la distribución de los nucleones. A modo introductorio, presentamos las ecuaciones de estado para un gas no interactuante.

3.1. Ecuaciones de estado en condiciones de equilibrio estelar

Las condiciones de equilibrio para las EBs establecen la neutralidad de carga (3.1) y la conservación del número de bariones (3.2):

$$N_e = N_p \tag{3.1}$$

$$N_b = N_n + N_p \tag{3.2}$$

Debido a que los protones y neutrones son aproximadamente 10^3 veces más masivos que los electrones, se comportan como fermiones no relativistas. Por tanto, en la expresión para la densidad de energía (masa) debe considerarse la masa en reposo del nucleón $m_N = 931,494 \text{ MeV}$, mientras que el aporte del mismo a la presión en el caso degenerado es despreciable. Esto permite afirmar que es precisamente la presión del gas degenerado de electrones lo que compensa la atracción gravitacional, evitando el colapso de la estrella.

3.1.1. Enanas blancas

Al considerar la masa en reposo de los iones y el gas libre de electrones, la densidad de energía para enanas blancas en ausencia de campo magnético es:

$$E(\mu, 0, 0) = \Omega(\mu, 0, 0) + \mu N(\mu, 0, 0) + \frac{A}{Z} m_N N(\mu, 0, 0), \quad (3.3)$$

donde Z/A es el número de electrones por barión.

Esto nos permite definir la función:

$$\chi(x, A/Z) = \chi(x) + \frac{1}{3\pi^2} \frac{A}{Z} \frac{m_N}{m} x^3, \quad (3.4)$$

de manera que la densidad de energía queda:

$$E_{A/Z}(x, 0, 0) = m^4 \chi(x, A/Z). \quad (3.5)$$

3.1.1.1. Ecuación politrópica

Las ecuaciones de estado formada por la energía (3.5) y la presión (2.20) son paramétricas en el momentum de Fermi adimensional. Para las enanas blancas, usualmente se considera la condición $m_N \gg m$, y se escribe una ecuación de estado politrópica:

$$P = \kappa E^\Gamma, \quad (3.6)$$

con

$$\kappa(A/Z) = \frac{1}{3\Gamma} \left(\frac{3\pi^2}{m^4} \right)^{\Gamma-1} \left(\frac{A}{Z} \frac{m}{m_N} \right)^\Gamma. \quad (3.7)$$

Para **electrones no relativistas** ($x \ll 1$), los parámetros Γ y $\kappa(A/Z)$ tienen los valores siguientes:

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \quad (3.8a)$$

$$\kappa(A/Z) = \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m^4} \right)^{2/3} \left(\frac{A}{Z} \frac{m}{m_N} \right)^{5/3} = \frac{4,2162 \times 10^{-5}}{\text{MeV}^{8/3}} \left(\frac{A}{Z} \right)^{5/3}. \quad (3.8b)$$

En el caso de **electrones relativistas** ($x \gg 1$), los valores de dichos parámetros serían:

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \quad (3.9a)$$

$$\kappa(A/Z) = \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m^4} \right)^{1/3} \left(\frac{A}{Z} \frac{m}{m_N} \right)^{4/3} = \frac{8,5017 \times 10^{-5}}{\text{MeV}^{4/3}} \left(\frac{A}{Z} \right)^{4/3}. \quad (3.9b)$$

A pesar de que no la utilizaremos en el presente trabajo, esta aproximación es muy usada, pues facilita los cálculos tanto para las ecuaciones de estructura Newtonianas como para las obtenidas usando la TGR. Específicamente en el caso Newtoniano, el empleo de la ecuación de estado politrópica conduce a la conocida ecuación de Lane-Emden [10].

3.1.2. Enanas blancas magnetizadas en el régimen de campo débil ($B < B_c$)

En la aproximación de campo débil, si se tiene en cuenta la energía en reposo de los iones, la energía (2.42a) del gas libre magnetizado de electrones toma la forma:

$$E(x, 0, B) = E_{A/Z}(x, 0, 0) + \Omega_B + \left(m\sqrt{x^2 + 1} + \frac{A}{Z}m_N \right) N_B. \quad (3.10)$$

Luego, podemos definir:

$$E_{A/Z}(x, 0, B) = m^4 \chi(x, A/Z, B), \quad (3.11a)$$

$$\chi(x, A/Z, B) = \chi(x, A/Z) + \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{B}{B_c} \right)^2 \left[\sqrt{x^2 + 1} + \frac{m_N A}{mx Z} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]. \quad (3.11b)$$

Asimismo, podemos escribir las presiones como:

$$P_{\parallel}(x, 0, B) = m^4 \Phi_+(x, B), \quad (3.12a)$$

$$P_{\perp}(x, 0, B) = m^4 \Phi_-(x, B), \quad (3.12b)$$

$$\Phi_{\pm}(x, B) = \frac{1}{8\pi^2} \left[\Phi(x) \pm \frac{2}{3} \left(\frac{B}{B_c} \right)^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]. \quad (3.12c)$$

Las ecuaciones de estado resultantes, en función del momento de Fermi adimensional x , para un campo magnético dado, están determinadas por las ecuaciones (3.11) y (3.12), y se han graficado en la Figura 3.1.

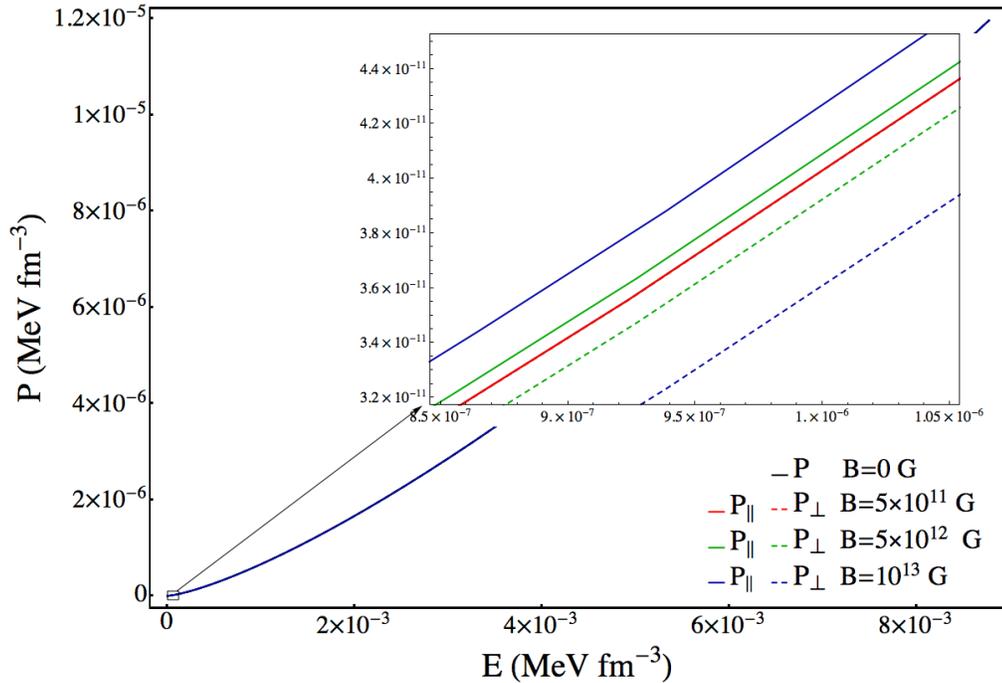


Figura 3.1: Ecuaciones de estado para configuraciones con $A/Z = 2$.

Para una mejor visualización del comportamiento de las ecuaciones obtenidas, desarrollamos en serie de Taylor las funciones $\chi(x, A/Z, B)$ y $\Phi_{\pm}(x, B)$. En el caso de **electrones no relativistas** ($x \ll 1$), escribimos $\chi(x, A/Z, B)$ y $\Phi_{\pm}(x, B)$ como una serie de potencias de x en torno a cero, donde:

$$\chi(x, A/Z, B) = \chi(x, A/Z) + \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{B}{B_c}\right)^2 \left[1 + \frac{m_N A}{m x Z} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \dots\right], \quad (3.13a)$$

$$\Phi_{\pm}(x, B) = \Phi(x) \pm \frac{1}{15\pi^2} \frac{1}{4} \left(\frac{B}{B_c}\right)^2 \left[5x - \frac{5x^3}{6} + \frac{3x^5}{8}\right] + \dots \quad (3.13b)$$

En cambio, para **electrones relativistas** ($x \gg 1$), el desarrollo en potencias de x es respecto a infinito:

$$\chi(x, A/Z, B) = \chi(x, A/Z) + \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{B}{B_c}\right)^2 \left[-\frac{m_N A}{m x Z} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \dots\right], \quad (3.14a)$$

$$\Phi_{\pm}(x, B) = \Phi(x) \pm \left(\frac{B}{B_c}\right)^2 \frac{\ln(2x)}{12\pi^2} + \dots \quad (3.14b)$$

3.2. Ecuaciones de estado para enanas blancas magnéticas con partículas interactuantes

Al obtener las ecuaciones de estado anteriores, se consideró que las partículas componentes de la enana blanca no interactúan entre sí, lo cual debe incluirse en un análisis más realista. En este sentido, existen varias correcciones, entre las que las electrostáticas y el decaimiento β inverso son las más importantes.

La principal corrección electrostática tiene en cuenta que las cargas positivas no están distribuidas uniformemente en el gas, sino que se concentran en los núcleos ionizados. Consecuentemente, la energía y la presión de los electrones disminuye, ya que la distancia media entre los electrones es mayor que la distancia media entre los electrones y los núcleos; y las fuerzas repulsivas son menores que las atractivas.

En un gas no degenerado, estos efectos Coulombianos se hacen más importantes a medida que aumenta la densidad de electrones, mientras que en el límite degenerado, los iones se localizan en una red cristalina que maximiza la distancia ión-ión. En la literatura se pueden encontrar diferentes aproximaciones para modelar la interacción Coulombiana, cada una de ellas da una ecuación de estado diferente [47]. En este trabajo, utilizaremos la corrección descrita en los artículos [48–50], que se basa en la ecuación de estado de Baym-Petthick-Sutherland (BPS) [51].

Consideremos el sistema como un gas degenerado de electrones que rodea a una red de partículas puntuales compuesta por dos tipos de iones: $\frac{A}{Z}X$ y $\frac{A'}{Z'}X'$ (Figura 3.2).

En este caso, la densidad de energía de la red se escribe como:

$$\varepsilon_L = C e^2 [N(x, 0, B)]^{4/3} \frac{\eta Z^2 + \zeta Z'^2 + (1 - \eta - \zeta) Z Z'}{(\xi Z + (1 - \xi) Z')^{4/3}}, \quad (3.15)$$

donde ξ es la fracción de iones del tipo $\frac{A}{Z}X$ y $\xi' = 1 - \xi$ la fracción de iones $\frac{A'}{Z'}X'$; C , ζ y η son constantes que dependen del tipo de red escogida (Tabla 3.1); y $N(x, 0, B)$ es la densidad de electrones dada por las expresiones (2.17) y (2.39).

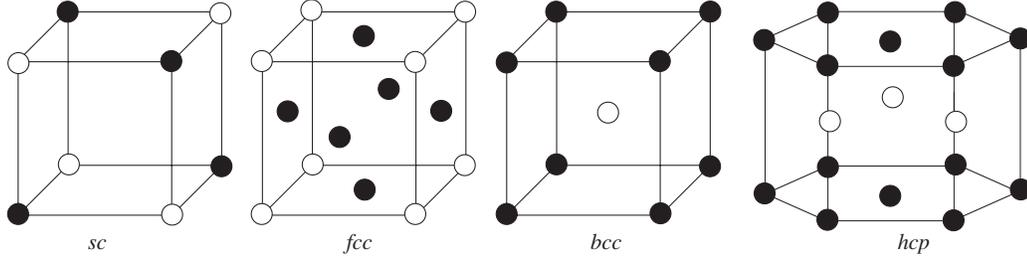


Figura 3.2: Estructuras cristalinas heterogéneas cúbica simple (sc), cúbica centrada en las caras (fcc), cúbica centrada en el cuerpo (bcc) y hexagonal compacta (hcp). En todos los casos, los iones $\frac{A}{Z}X$ se representan por círculos negros y los iones $\frac{A'}{Z'}X'$ con círculos blancos.

Estructura	C	η	ζ	$(1 - \eta - \zeta)$	ξ
sc	-1,418649	0,403981	0,403981	0,192037	1/2
fcc	-1,444141	0,654710	0,154710	0,190580	3/4
bcc	-1,444231	0,389821	0,389821	0,220358	1/2
hcp	-1,444083	0,345284	0,345284	0,309433	1/2

Tabla 3.1: Parámetros C , η , ζ y $(1 - \eta - \zeta)$ de la red para diferentes estructuras cristalinas heterogéneas [48, 50] obtenidos mediante el método de Coldwell-Horsfall y Maradudin, y fracción de iones del tipo $\frac{A}{Z}X$ consideradas.

La corrección a la presión introducida al tener en cuenta la red es:

$$P_L = \frac{\varepsilon_L}{3}. \quad (3.16)$$

Luego, la densidad de energía total y las presiones, i. e., las ecuaciones de estado se modifican debido a la energía y la presión de la red, y quedan:

$$E = m_X N_X + m_{X'} N_{X'} - m N(x, 0, B) + m^4 \chi(x, B) + \varepsilon_L, \quad (3.17a)$$

$$P_{\parallel} = m^4 \Phi_+(x, B) + P_L, \quad (3.17b)$$

$$P_{\perp} = m^4 \Phi_-(x, B) + P_L, \quad (3.17c)$$

donde la función $m^4 \chi(x, B)$ se corresponde con la densidad de energía del gas de electrones:

$$\chi(x, B) = \chi(x) + \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{B}{B_c} \right)^2 \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]; \quad (3.18)$$

m_X ($m_{X'}$) y N_X ($N_{X'}$) son, respectivamente, la masa en reposo del átomo $\frac{A}{Z}X$ ($\frac{A'}{Z'}X'$), y la densidad de los iones de tipo correspondiente. Para no contar doblemente los electrones, se sustrajo el término $m N(x, 0, B)$.

Usando la condición de neutralidad de carga:

$$N(x, 0, B) = Z N_X + Z' N_{X'}, \quad (3.19)$$

se obtiene:

$$N_X = \frac{\xi}{Z\xi + (1-\xi)Z'} N(x, 0, B), \quad (3.20)$$

$$N_{X'} = \frac{1-\xi}{Z\xi + (1-\xi)Z'} N(x, 0, B). \quad (3.21)$$

Si consideramos el caso homogéneo, donde solo tenemos un tipo de ión en la red cristalina, la energía de la red se reduce a:

$$\varepsilon_L = Ce^2 [N(x, 0, B)]^{4/3} Z^{2/3}, \quad (3.22)$$

y la condición de neutralidad de carga a:

$$N(x, 0, B) = ZN_X. \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta, además, que la densidad de energía en reposo del átomo $\frac{A}{Z}X$ es:

$$m_X N_X = \frac{A}{Z} m_N N(x, 0, B) + m N(x, 0, B), \quad (3.24)$$

podemos reescribir las ecuaciones de estado como:

$$E = \frac{A}{Z} m_N N(x, 0, B) + m^4 \chi(x, B) + \varepsilon_L, \quad (3.25a)$$

$$P_{\parallel} = m^4 \Phi_+(x, B) + P_L, \quad (3.25b)$$

$$P_{\perp} = m^4 \Phi_-(x, B) + P_L, \quad (3.25c)$$

Nótese que en este caso, la energía es la suma de la expresión obtenida cuando solo se considera el aporte de la masa en reposo de los iones (3.11) con la energía de la red (3.15), y que esta última depende únicamente del parámetro C , el cual varía según la red utilizada.

En la Figura 3.3 se muestran los gráficos de las ecuaciones de estado para una red bcc homogénea formada por ^{12}C , que comparamos con las correspondientes al caso de partículas no interactuantes en la Figura 3.4.

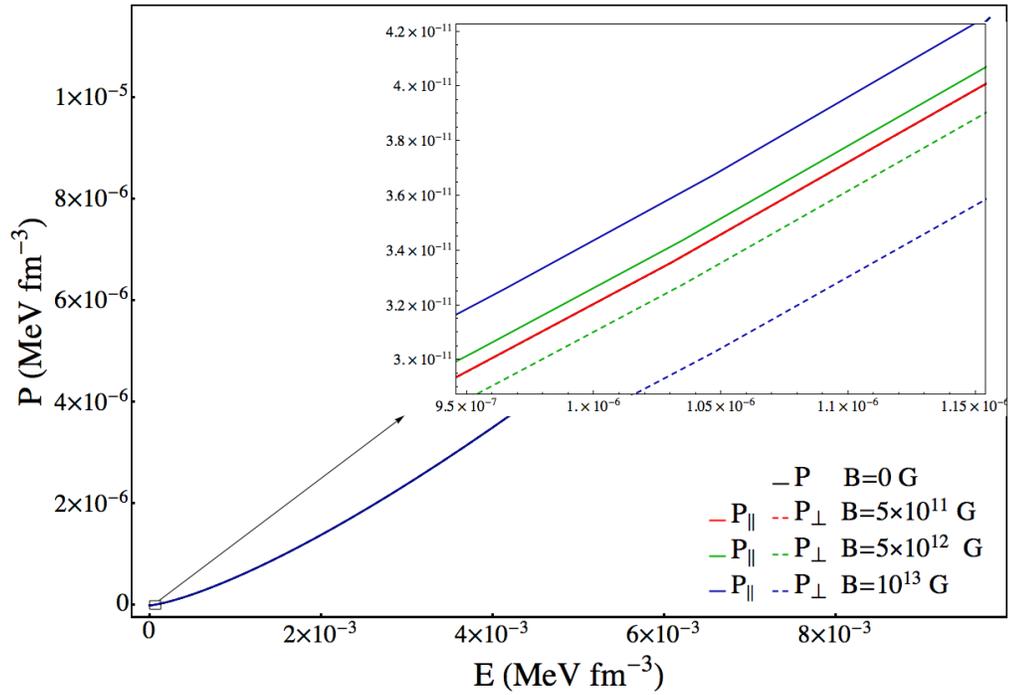


Figura 3.3: Ecuaciones de estado de EBs compuestas de ^{12}C ($A/Z = 2$) para la red cristalina homogénea de tipo bcc.

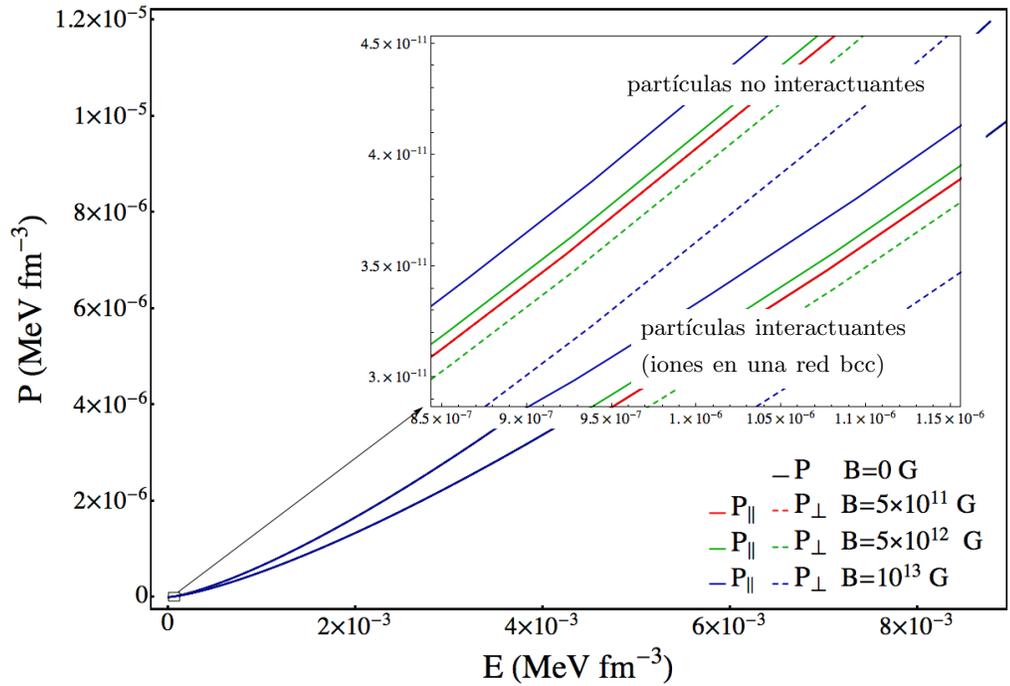


Figura 3.4: Comparación entre las ecuaciones de estado representadas en las Figuras 3.1 y 3.3. Nótese que al introducir la corrección las ecuaciones de estados se suavizan.

Capítulo 4

Ecuaciones de estructura

La estructura de una estrella está determinada por la dependencia con el radio de las magnitudes termodinámicas y los coeficientes métricos. Para obtener dicha relación se emplean las ecuaciones de Einstein, que vinculan las ecuaciones de estructura y las ecuaciones de estado.

En este capítulo, se discute las soluciones de las ecuaciones de estructura en la geometría esférica usada habitualmente, y una geometría axisimétrica [19, 20], más adecuada para nuestro problema debido a la anisotropía que introduce el campo magnético. Las EdE utilizadas son las obtenidas previamente en el Capítulo 3.

4.1. Ecuaciones de Einstein

La Teoría General de la Relatividad (TGR) tiene como premisa que *la gravitación es la manifestación dinámica de la curvatura del espacio-tiempo*; y ha sido validada experimentalmente por los efectos que predice [52] y no se justifican mediante la teoría de la relatividad especial [53], como las trayectorias curvas de los rayos de luz, el corrimiento hacia el rojo de un fotón bajo la influencia del campo gravitatorio, la precesión en la órbita de Mercurio, entre otros [52].

En la TGR, la curvatura del espacio-tiempo se debe al flujo de materia-energía. Luego, las ecuaciones de campo deben tener como fuente al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, que es un tensor de segundo orden. Por lo tanto, la curvatura del espacio-tiempo debe expresarse por un tensor de curvatura de igual orden. Las ecuaciones de Einstein establecen este vínculo entre el contenido de materia en el espacio-tiempo y la curvatura del mismo [52]:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

donde $x_\mu = (x_4, \vec{x})$, $\kappa = 8\pi G$, siendo G la constante de gravitación (ver Tabla A.1 en el Apéndice A). El tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

está determinado por el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha, \quad (4.3)$$

y por el escalar de Ricci $R = R^\mu{}_\mu$, que dependen de segundas derivadas de la métrica a través de los índices de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (4.4)$$

Los tensores que aparecen en las ecuaciones de Einstein son simétricos, de modo que en 4 dimensiones tienen 10 componentes independientes. Dada la libertad de elección de las cuatro coordenadas del espacio-tiempo, las ecuaciones independientes se reducen a 6. Las ecuaciones de Einstein son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con alta complejidad, por lo que es difícil encontrar soluciones exactas.

Dadas las condiciones extremas de masas, radios y densidades que presentan los objetos compactos, las correcciones de la Teoría General de la Relatividad a las ecuaciones de Newton son importantes para una correcta descripción del equilibrio hidrostático. Particularmente, en una enana blanca la aproximación Newtoniana arroja buenos resultados, pero una correcta predicción de la masa máxima de estas estrellas debe hacerse utilizando la TGR.

En este trabajo, usaremos como fuente el tensor de energía-momento presentado en el Capítulo 2, teniendo en cuenta las ecuaciones de estado obtenidas en el Capítulo 3.

4.2. Simetría esférica: Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Para describir una estrella estática en equilibrio se emplea generalmente la métrica esférica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.5)$$

Utilizando la métrica (4.5), la ecuación (4.1) y la ley de conservación de la energía ($T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$) podemos encontrar las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [8, 52]:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 E(r), \quad (4.6a)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(E(r) + P(r))(M(r) + 4\pi P(r)r^3)}{r^2 - 2rM(r)}, \quad (4.6b)$$

cuyas soluciones describen las configuraciones de estrellas estáticas y con simetría esférica.

Para resolver el sistema de ecuaciones (4.6) utilizamos las ecuaciones de estado paramétricas halladas en el Capítulo 3. El radio R y la masa correspondiente M de la estrella se determinan imponiendo la condición de presión cero $P(R) = 0$. La presión central queda fijada por la EdE, $P(0) = P_c$, y $M(0) = 0$. Las funciones $M(r)$ y $P(r)$ resultantes para momentum de Fermi $x = 20$ y $B = 0$, por ejemplo, se comportan según la Figura 4.1.

Dada una EdE, existe una familia única de estrellas parametrizadas por la densidad de energía central, que especifica un modelo de secuencias estelares $M = M(E_c)$, $R = R(E_c)$. Estos resultados se presentan mediante una curva donde cada punto representa una estrella de masa M y radio R en equilibrio hidrodinámico (diagrama masa-radio).

No todas las ramas de una secuencia M-R son estables. El problema de Sturm-Liouville correspondiente para los modos de oscilación fue tratado por primera vez por Chandrasekhar en 1964 [54]. El criterio usual de estabilidad para las estrellas [55] es que un modo radial se vuelve estable o inestable en cada extremo de la función $M(R)$. A medida que la densidad central aumenta, un modo

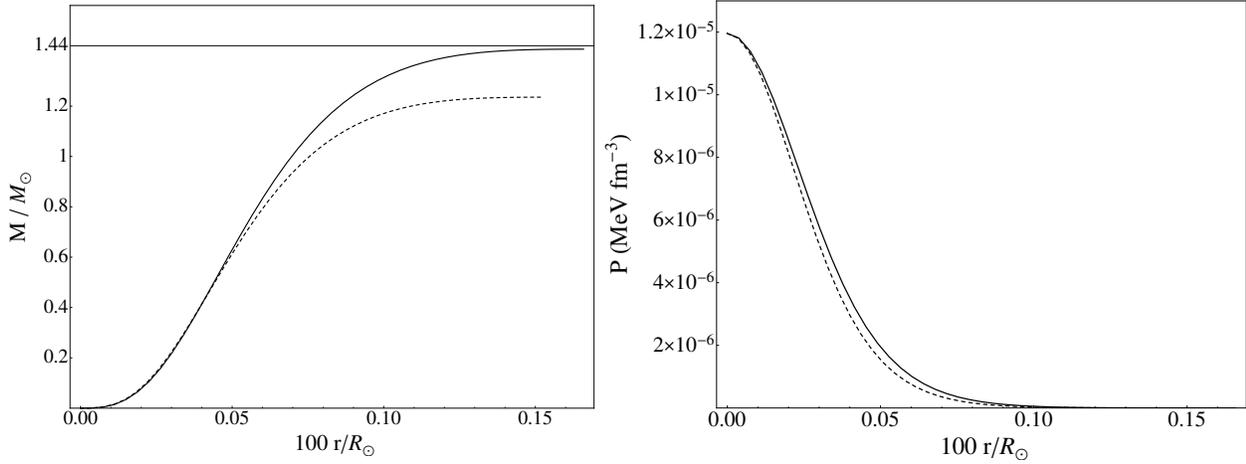


Figura 4.1: Funciones (a) $M(r)$ y (b) $P(r)$. Ambas se obtuvieron al resolver las ecuaciones (4.6) con $E_c = E_{A/Z}(20, 0, 0)$ en coordenadas esféricas. La curva continua corresponde configuraciones con $A/Z = 2$, y la discontinua para $A/Z = 2,15$.

estable se vuelve inestable cuando la curva gira en contra de las manecillas del reloj, y un modo inestable se hace estable donde la curva gira a favor de las manecillas del reloj.

4.2.1. Discusión de los resultados numéricos

En las ecuaciones TOV (4.6), obtenidas en simetría esférica, aparece solamente una presión. En los estudios que incluye presiones anisotrópicas debido al campo magnético, se ha justificado el uso de estas ecuaciones de equilibrio hidrostático cuando el campo magnético es moderado o débil porque la diferencia entre las presiones es pequeña y, o bien se aproxima $P_{\parallel} = P_{\perp}$ o se usa la menor de ellas [56].

En este capítulo, hemos resuelto dichas ecuaciones de estructura para las presiones paralela y perpendicular que aparecen en el Capítulo 3, teniendo en cuenta la presencia del campo magnético en el régimen de campo débil y distintas composiciones químicas. Además, los iones, que interactúan entre ellos y con los electrones, se consideran distribuidos en una red cristalina.

Nuestros resultados muestran que para una presión y campo magnético dados, con la energía como función de la composición, la masa es menor en tanto mayor sea A/Z (ver diferencia entre la Figura 4.2a y la Figura 4.2c). Asimismo, los efectos de la corrección en las ecuaciones de estado se manifiestan en las relaciones masa-radio, ya que la masa disminuye al introducir la presión y la energía de la red (ver cambios en la Figura 4.2b respecto a la Figura 4.2a).

Por otra parte, en la Figura 4.2a, notamos que para una misma composición química, a pesar de la pequeña variación entre las EdE para la presión paralela y la correspondiente presión perpendicular (Figura 3.1), las respectivas relaciones masa-radio obtenidas son distintas, y la diferencia aumenta a medida que se incrementa el campo magnético. Este resultado ya había sido obtenido en [19, 20], donde se resolvieron las ecuaciones TOV para presiones anisotrópicas del gas de electrones magnetizado no interactuante.

En la Figura 4.2 se aprecia que las masas obtenidas a partir de las soluciones para la presión

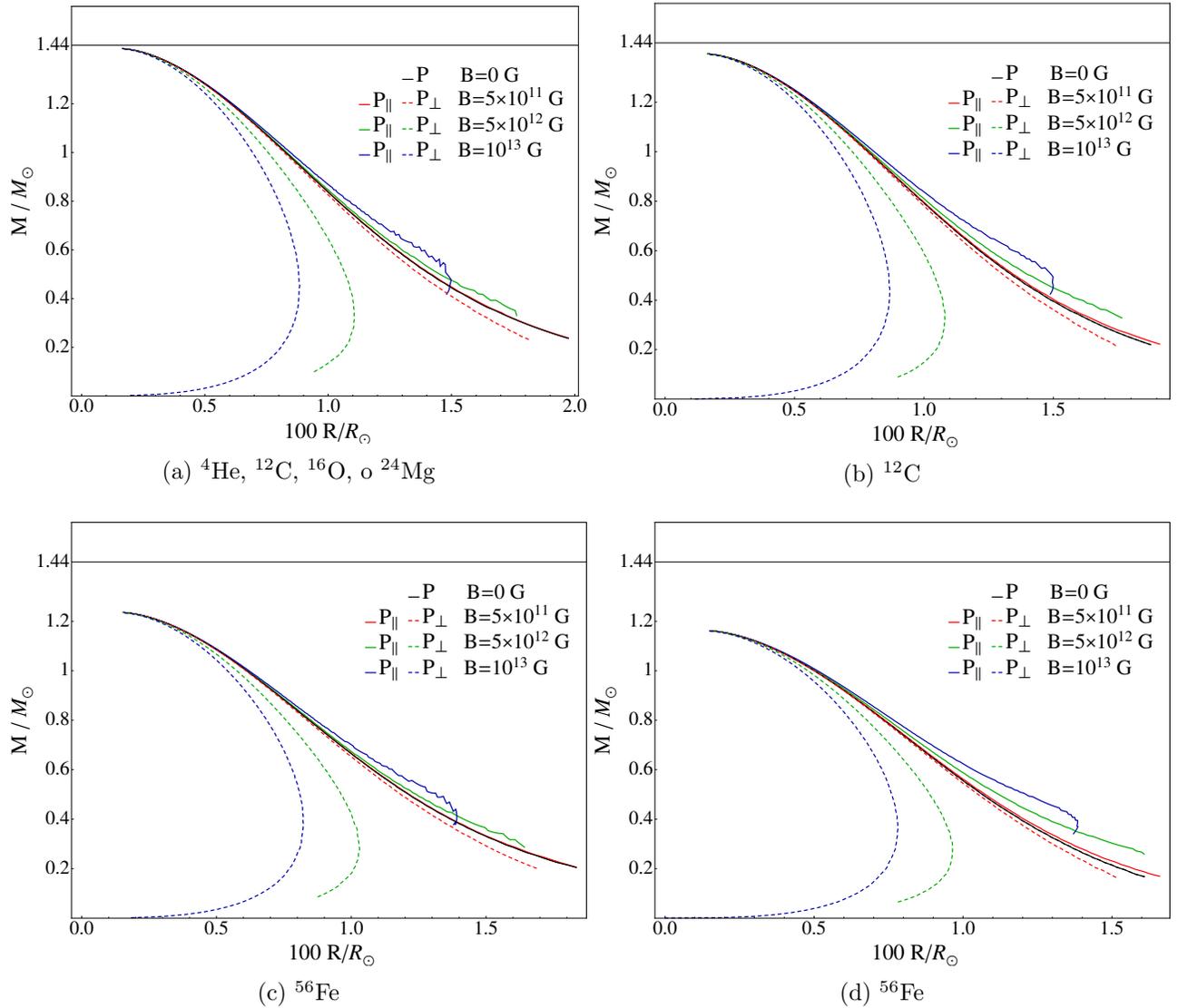


Figura 4.2: Soluciones en simetría esférica para distintas configuraciones. En (a) y (c) se emplearon las ecuaciones de estado con componentes no interactuantes, mientras en (b) y (d) se incluye la corrección debida a la interacción de los electrones con la red, para la red de tipo bcc.

paralela y campos entre 10^{11} G y 10^{13} G (correspondientes a las obtenidas por Mathews [57] para presión isotrópica) son mayores que las computadas en ausencia de campo. Además, no obtenemos ninguna configuración estable de enanas blancas magnéticas cuyo valor máximo de masa sobrepase el límite de Chandrasekhar como ha sido propuesto en [15].

Por otra parte, en la Figura 4.3, se superponen con las masas y los radios observacionales de algunas enanas blancas detectadas por el satélite *Hipparcos* [58], lo cual permite validar nuestro modelo.

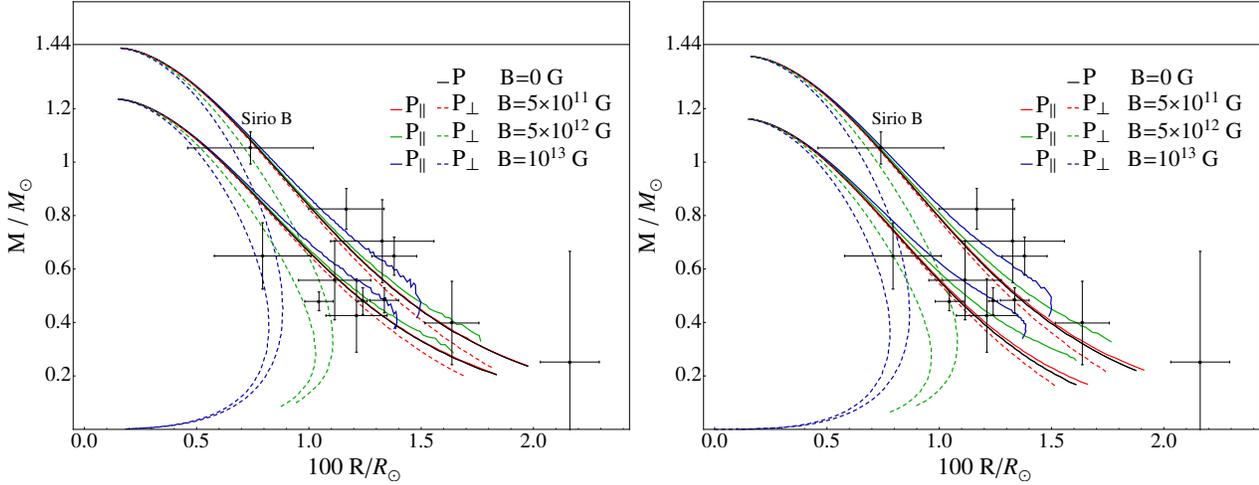


Figura 4.3: Comparación con datos observacionales. En (a) se incluyen las soluciones para los componentes no interactuantes estudiadas en las Figuras 4.2a y 4.2c; mientras en (b) se grafican las soluciones para componentes interactuantes presentadas en las Figuras 4.2b y 4.2d.

Consecuentemente nuestros resultados apuntan a que es un imperativo emplear una métrica axisimétrica, apropiada para tomar en cuenta las ecuaciones de estado anisotrópicas que se derivan de la inclusión de la presencia del campo magnético (ver Sección 4.3) aún cuando el campo magnético sea considerado débil.

4.3. Simetría cilíndrica

Debido a la existencia de presiones anisotrópicas, nos propusimos estudiar la estructura de una EB en una geometría con simetría axial, que es más “natural” para los sistemas de electrones magnetizados. Por tanto, para obtener las ecuaciones de estructura utilizaremos la métrica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\phi^2 + e^{2\Psi(r)} dz^2, \quad (4.7)$$

donde Φ , Λ , y Ψ son funciones de r solamente.

De las ecuaciones de Einstein en unidades naturales y de la conservación de la energía ($T^{\mu\nu}_{;\nu}$)

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales [59]:

$$P'_\perp = -\Phi'(E + P_\perp) - \Psi'(P_\perp - P_\parallel), \quad (4.8a)$$

$$4\pi e^{2\Lambda}(E + P_\parallel + 2P_\perp) = \Phi'' + \Phi'(\Psi' + \Phi' - \Lambda') + \frac{\Phi'}{r}, \quad (4.8b)$$

$$4\pi e^{2\Lambda}(E + P_\parallel - 2P_\perp) = -\Psi'' - \Psi'(\Psi' + \Phi' - \Lambda') - \frac{\Psi'}{r}, \quad (4.8c)$$

$$4\pi e^{2\Lambda}(P_\parallel - E) = \frac{1}{r}(\Psi' + \Phi' - \Lambda'). \quad (4.8d)$$

Las expresiones anteriores, junto a las EdE $E(x) = E(x(P_\perp))$, y $P_\parallel = P_\parallel(x)$ forman un sistema de ecuaciones en las variables P_\perp , P_\parallel , E , Φ , Λ , Ψ , Φ' , y Ψ' .

Las condiciones de frontera empleadas deben tener en cuenta los factores del tipo $1/r$ en (4.8). Por tanto, se hace una expansión en serie de P_\perp , Φ , Ψ , y Λ alrededor de $r = 0$. También, $\Psi = \Phi = \Lambda = 0$ en $r = 0$ para que los coeficientes métricos correspondientes sean igual a 1 en ese punto y $\Psi' = \Phi' = 0$ para que las soluciones en el eje z sean suaves. Con estas consideraciones, las condiciones de frontera en el centro son:

$$P_\perp(0) = P_{\perp 0}, \quad (4.9a)$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}(P_{\parallel 0} + 2P_{\perp 0} + E_0)(r_0^2 - 2r_0), \quad (4.9b)$$

$$\Psi(0) = \frac{1}{2}(-P_{\parallel 0} + 2P_{\perp 0} - E_0)(r_0^2 - 2r_0), \quad (4.9c)$$

$$\Phi'(0) = \Psi'(0) = \Lambda(0) = 0. \quad (4.9d)$$

Además, se impone la condición $P_\perp(R_\perp) = 0$, para determinar el radio de la estrella en la dirección ecuatorial (perpendicular).

Por hipótesis, en este modelo, todas las variables dependen solamente de la coordenada radial (en el plano perpendicular al campo magnético). Luego, no es posible calcular la masa total de la estrella como se hizo para el caso de simetría esférica. Por tanto calcularemos la generalización para la masa dada por Tolman [60]

$$M_T = \int \sqrt{-g}(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3)dV \quad (4.10)$$

para la métrica cilíndrica (4.7) no podemos calcular la masa, sino, la masa por unidad de longitud (M_T/R_\parallel) [61]:

$$\frac{M_T}{R_\parallel} = 4\pi \int_0^{R_\perp} r e^{\Phi(r)+\Psi(r)+\Lambda(r)}(E - 2P_\perp - P_\parallel)dr \quad (4.11)$$

4.3.1. Discusión de los resultados numéricos

Para la métrica cilíndrica que presentamos en esta Sección, resolvimos las ecuaciones de estructura formadas por (4.8) y (4.11), con las ecuaciones de estado del Capítulo 3. Al igual que en el caso de simetría esférica, hemos considerado la presencia del campo magnético débil y las composiciones químicas ya discutidas.

En este caso, las soluciones numéricas graficadas en la Figura 4.4, muestran que en la magnitud $(M_T/M_\odot) \times (R_\perp/R_\parallel)$ se mantiene el efecto de disminución que se obtenía para la masa al variar la composición química e introducir la corrección debida a las interacciones.

Sin embargo, a pesar de obtener un valor máximo para $(M_T/M_\odot) \times (R_\perp/R_\parallel)$, debemos aclarar que esta no es la masa total de la estrella o masa de Schwarzschild, como se discute en [19, 20].

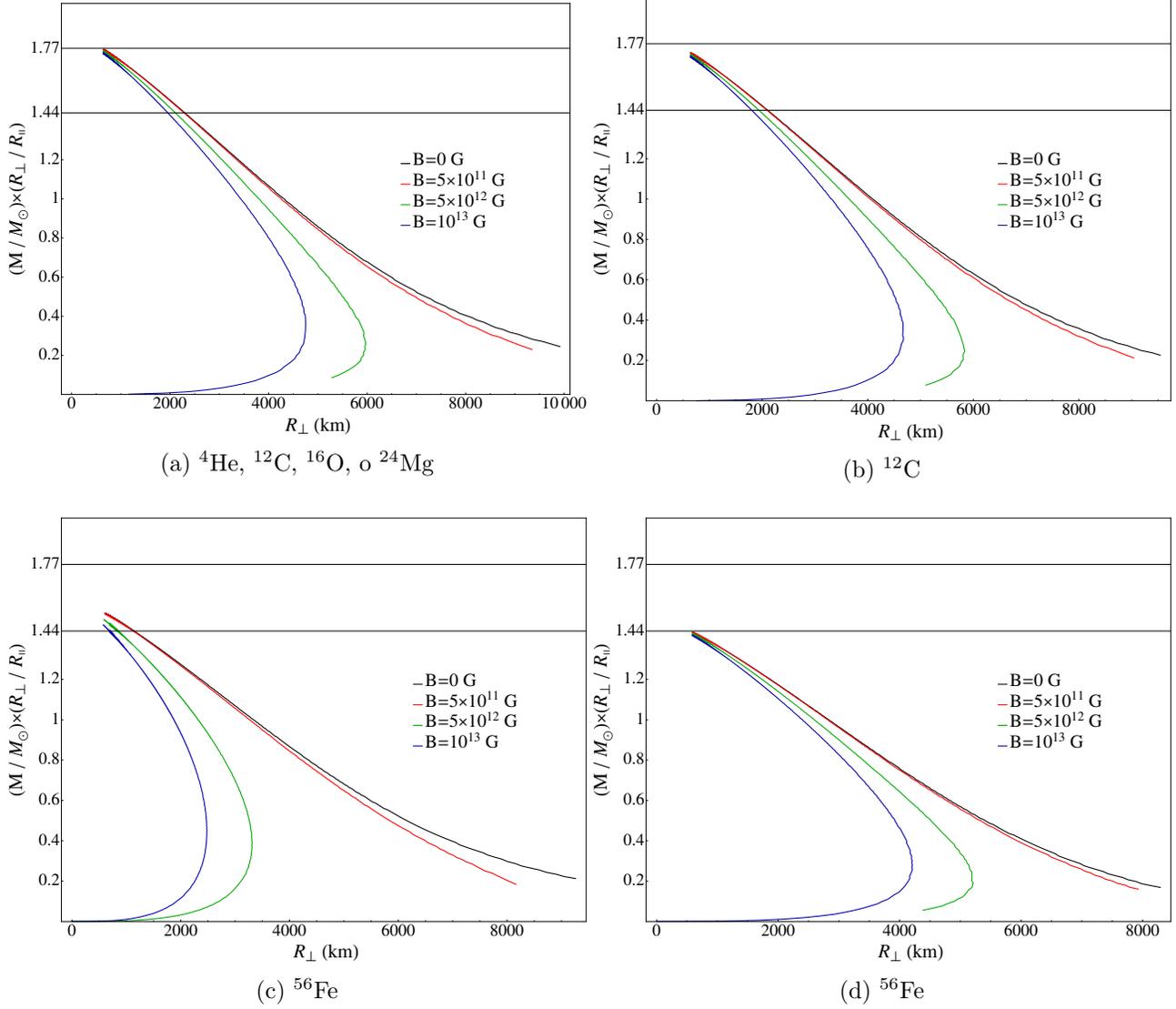


Figura 4.4: Soluciones en cilíndricas para distintas configuraciones. En (a) y (c) se emplearon las ecuaciones de estado con componentes no interactuantes, mientras en (b) y (d) se incluye la corrección debida a la interacción de los electrones con la red, para la red de tipo bcc.

Conclusiones

El trabajo presentado en esta tesis ha consistido en estudiar tanto las ecuaciones de estado como las de estructura de las enanas blancas magnetizadas, analizando los efectos de la anisotropía producida por el campo magnético, que da lugar a la presencia de dos presiones: una paralela al campo y otra perpendicular a él. Además, se tiene en cuenta que los iones no están uniformemente distribuidos y se encuentran formando una red cristalina, cuya estructura depende de la composición química de la estrella en cuestión. Por tanto, se ha incluido la corrección Coulombiana debida a la interacción de los electrones con esa red cristalina para varios tipos de redes y distintas composiciones químicas.

Podemos destacar los siguientes resultados relativos a las ecuaciones de estado:

- Las observaciones astrofísicas para enanas blancas magnetizadas, reportan campos magnéticos superficiales entre 10^3 G y 10^9 G, mientras que en el interior los campos magnéticos máximos permitidos son de 10^{12} G. Esto justifica suponer campos magnéticos en el límite de campo débil ($B < B_c = 4,41 \times 10^{13}$ G), lo que nos ha permitido obtener todas las magnitudes como una corrección dependiente del campo magnético respecto a las correspondientes expresiones no magnetizadas.
- Las ecuaciones de estado que hemos obtenido para estudiar las enanas blancas magnetizadas son más realistas que las empleadas en trabajos anteriores del grupo [20]. Incluyen la presencia del campo magnético y la interacción Coulombiana entre los electrones y los iones distribuidos en una red cristalina, cuya estructura depende de la composición química de la estrella. Las expresiones están escritas de forma general, para redes heterogéneas y homogéneas, que ofrecen la posibilidad de considerar distintas composiciones químicas. Esto permite una gran libertad para estudiar de los efectos de la corrección, que esencialmente disminuye la energía y la presión del sistema.
- Para obtener las expresiones de las energías y las presiones se siguieron los métodos de la teoría cuántica de campos a temperatura finita, lo cual garantiza que podamos generalizar nuestros resultados, a pesar de haber tomado el límite degenerado.

Con las ecuaciones de estado así obtenidas (anisotrópicas y considerando la interacción de los electrones con la red), se han resuelto las ecuaciones de equilibrio hidrostático en simetría esférica: las llamadas ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Igualmente, se ha determinado las soluciones de las ecuaciones de estructura en simetría cilíndrica que presentamos, más convenientes al tomar en cuenta la anisotropía de las presiones.

Entre los resultados relacionados con las ecuaciones de estructura sobresalen los que siguen:

- Se resolvieron las ecuaciones TOV para las presiones anisotrópicas, obteniendo diferentes configuraciones estables de masa y radio cuando es considerada una u otra presión. Esto confirmó que aún en el límite de campo débil, aplicable para EBs magnetizadas, es necesario recurrir a una simetría axisimétrica cuando existen presiones anisotrópicas.
- Se reprodujeron los resultados isotrópicos obtenidos en [57], correspondientes con nuestra presión paralela.
- Como era de esperar, en el régimen de campo débil, los valores máximos de masas para las configuraciones estables encontradas son siempre menores que la masa de Chandrasekhar $M_{Ch} = 1,44M_{\odot}$.
- En simetría cilíndrica, como consecuencia de haber supuesto que los coeficientes métricos solo dependen de r y no de las otras coordenadas espaciales (θ, z) [19, 20], no se encuentran soluciones para los valores totales de las masas por lo que no podemos obtener los usuales gráficos de masas y radios. Sin embargo, podemos obtener configuraciones de $(M_T/M_{\odot}) \times (R_{\perp}/R_{\parallel})$ contra R_{\perp} con valores máximos.
- Los resultados numéricos al introducir redes homogéneas, con un solo tipo de ión, formadas por los elementos ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, o ${}^{24}\text{Mg}$, que tienen $A/Z = 2$; y ${}^{56}\text{Fe}$, con $A/Z = 2,15$ muestran que según aumenta A/Z disminuye la masa (o la magnitud $(M_T/M_{\odot}) \times (R_{\perp}/R_{\parallel})$ en cilíndricas).

Recomendaciones

Para dar continuidad a este trabajo, sugerimos:

- Complementar el estudio de las ecuaciones de estado teniendo en cuenta otras composiciones químicas y otras redes cristalinas.
- Considerar los efectos de la temperatura, que si bien no afectarían mucho los observables astrofísicos masas y radios, podrían tener implicaciones en los fenómenos de transporte de energía que se dan en las enanas blancas, como la emisión de radiación (luminosidad) y la emisión de neutrinos.

También, pudiera estudiarse la relación entre la intensidad del campo magnético de la estrella y su temperatura [62].

- Obtener ecuaciones de estructura en simetría cilíndrica suponiendo que los coeficientes métricos dependen de todas las coordenadas espaciales y no únicamente de r , de manera que la solución devuelva la masa total o la masa de Schwarzschild del objeto compacto.

Apéndice A

Unidades y constantes físicas usadas

En la tesis, se emplean las unidades naturales (UN) cuando se tratan aspectos cuánticos. En este sistema:

$$\hbar = c = 1, \quad [\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{masa}]^{-1} = [\text{energía}]^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

Los cálculos y los resultados numéricos se realizaron en unidades nucleares, donde:

$$[\text{longitud}] = \text{fm} = 10^{-15} \text{m}, \quad [\text{tiempo}] = \text{fm}/c = 3 \times 10^{-24} \text{s}, \quad [\text{masa}] = [\text{energía}] = \text{MeV}. \quad (\text{A.2})$$

En las expresiones de las propiedades termodinámicas que se obtuvieron en los Capítulos 2 y 3, para convertir de unidades naturales a las nucleares, se divide por $(\hbar c)^3$, con $\hbar c = 197,327 \text{ MeV fm}$.

Por otra parte, la unidad del campo magnético usada es el Gauss ($1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$), correspondiente al sistema CGS.

Magnitud Física (Símbolo)	SI	CGS	UN
Velocidad de la luz (c)	$2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	$2,998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$	1
Carga eléctrica del electrón (e)	$1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$	$4,803 \times 10^{-10} \text{ erg}^{1/2} \text{ cm}^{1/2}$	0.0854
Constante de Dirac (\hbar)	$1,054 \times 10^{-34} \text{ J s}$	$1,054 \times 10^{-27} \text{ erg s}$	1
Masa en reposo del electrón (m)	$9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$9,109 \times 10^{-28} \text{ g}$	0.511 MeV
Constante de gravitación (G)	$6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$	$6,674 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-3} \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$	

Tabla A.1: Principales constantes usadas expresadas en los sistemas SI, CGS y UN.

Magnitud Física	Símbolo	Valor	Unidades (SI)
Masa	M_{\odot}	$1,99 \times 10^{30}$	kg
Radio	R_{\odot}	$6,96 \times 10^5$	km
Temperatura efectiva	T_{\odot}^e	$5,778 \times 10^3$	K
Densidad	ρ_{\odot}	$1,410 \times 10^3$	kg m^{-3}
Luminosidad	L_{\odot}	$3,846 \times 10^{26}$	W

Tabla A.2: Principales parámetros del Sol.

Apéndice B

Contribución estadística del potencial termodinámico en el límite de campo magnético débil

Para obtener la contribución estadística del potencial termodinámico en el régimen de campo magnético débil, emplearemos la fórmula de Euler-MacLaurin (2.29).

Si se aproxima hasta la segunda potencia en (eB) , teniendo en cuenta el número de Bernoulli $B_2 = 1/6$, la función:

$$f(2eBl) = \left(\mu - \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBl} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBl} \right), \quad (\text{B.1})$$

tal que $f(\infty) = 0$ y $f'(\infty) = 0$, se obtiene:

$$eB \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) f(2eBl) \approx \int_0^{\infty} (2eB) f(2eBl) dl - 2(eB)^2 B_2 f'(0). \quad (\text{B.2})$$

Por tanto, el potencial (2.28) queda:

$$\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \left[\int_0^{\infty} (2eB) f(2eBl) dl - 2(eB)^2 B_2 f'(0) \right]. \quad (\text{B.3})$$

Si se define:

$$I = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (2eB) f(2eBl) dl, \quad (\text{B.4})$$

y se toma el límite clásico [63]:

$$p_{\perp}^2 = 2eBl = p_1^2 + p_2^2, \quad p_{\perp} dp_{\perp} = eB dl, \quad (\text{B.5})$$

obtenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$= -\frac{1}{4\pi^3} \int d^3 \vec{p} \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right). \quad (\text{B.7})$$

Nótese que I es el potencial a campo cero (2.14). Para resolver la integral planteada, hacemos un cambio de coordenadas. Queda:

$$\Omega(\mu, 0, 0) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty p^2 \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \Theta \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) dp, \quad (\text{B.8})$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - m^2}} p^2 \left(\mu - \sqrt{p^2 + m^2} \right) dp, \quad (\text{B.9})$$

resultando:

$$\Omega(\mu, 0, 0) = -\frac{m^4}{4\pi^2} \left[\frac{\mu\sqrt{\mu^2 - m^2}}{3m^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} \right) \right]. \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo (B.6) en (B.3):

$$\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) = \Omega(\mu, 0, 0) + \frac{(eB)^2 B_2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 f'(0). \quad (\text{B.11})$$

Por otra parte, teniendo en cuenta:

$$f'(0) = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{p_3^2 + m^2}} \right] \delta \left(\mu - \sqrt{p_3^2 + m^2} \right) - \frac{\Theta \left(\mu - \sqrt{p_3^2 + m^2} \right)}{\sqrt{p_3^2 + m^2}} \right\}, \quad (\text{B.12})$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 f'(0) = -\ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} \right), \quad (\text{B.13})$$

de donde el término asociado al campo, es:

$$\Omega_B = -\frac{m^4}{12\pi^2} \left[\frac{B}{B_c} \right]^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} \right). \quad (\text{B.14})$$

Finalmente, podemos escribir la parte estadística del potencial termodinámico del gas degenerado de electrones en presencia de campo magnético como:

$$\Omega_{\text{est}}(\mu, 0, B) = \Omega(\mu, 0, 0) + \Omega_B. \quad (\text{B.15})$$

Bibliografía

- [1] R. Narayan. *Black holes in astrophysics*. New Journal of Physics, **7**:199 (2005). doi:10.1088/1367-2630/7/1/199.
- [2] J. Casares. *The Mass Spectrum of X-Ray Binaries*. In J. C. Del Toro Iniesta, E. J. Alfaro, J. G. Gorgas, E. Salvador-Sole, y H. Butcher, editors, *The Many Scales in the Universe: JENAM 2004 Astrophysics Reviews*, (page 145) (2006).
- [3] R. H. Fowler. *On dense matter*. MNRAS, **87**:114–122 (1926).
- [4] J. Chadwick. *Possible Existence of a Neutron*. Nature, **129**:312 (1932). doi:10.1038/129312a0.
- [5] W. Baade y F. Zwicky. *On Super-novae*. Proceedings of the National Academy of Science, **20**:254–259 (1934). doi:10.1073/pnas.20.5.254.
- [6] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, y R. A. Collins. *Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source*. Nature, **217**:709–713 (1968). doi:10.1038/217709a0.
- [7] S. Chandrasekhar. *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*. ApJ, **74**:81 (1931). doi:10.1086/143324.
- [8] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff. *On Massive Neutron Cores*. Physical Review, **55**:374–381 (1939). doi:10.1103/PhysRev.55.374.
- [9] B. G. Castanheira, S. O. Kepler, S. J. Kleinman, A. Nitta, and L. Fraga. *Discovery of five new massive pulsating white dwarf stars*. MNRAS, **430**:50–59 (2013). doi:10.1093/mnras/sts474.
- [10] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, y neutron stars: The physics of compact objects* (1983).
- [11] R. C. Duncan y C. Thompson. *Magnetars*. In R. E. Rothschild y R. E. Lingefelter, editors, *High Velocity Neutron Stars*, volume 366 of *American Institute of Physics Conference Series*, (pages 111–117) (1996). doi:10.1063/1.50235.
- [12] D. Lai y S. L. Shapiro. *Cold equation of state in a strong magnetic field - Effects of inverse beta-decay*. ApJ, **383**:745–751 (1991). doi:10.1086/170831.
- [13] G. W. Collins, II. *The virial theorem in stellar astrophysics*. Tucson, Ariz., Pachart Publishing House (Astronomy y Astrophysics Series. Volume 7), 1978. 143 p. (1978).

- [14] R. A. Scalzo, G. Aldering, P. Antilogus, C. Aragon, S. Bailey, C. Baltay, S. Bongard, C. Buton, M. Childress, N. Chotard, Y. Copin, H. K. Fakhouri, A. Gal-Yam, E. Gangler, S. Hoyer, M. Kasliwal, S. Loken, P. Nugent, R. Pain, E. Pecontal, R. Pereira, S. Perlmutter, D. Rabinowitz, A. Rau, G. Rigaudier, K. Runge, G. Smadja, C. Tao, R. C. Thomas, B. Weaver, y C. Wu. *Nearby Supernova Factory Observations of SN 2007if: First Total Mass Measurement of a Super-Chandrasekhar-Mass Progenitor*. ApJ, **713**:1073–1094 (2010). doi:10.1088/0004-637X/713/2/1073.
- [15] U. Das y B. Mukhopadhyay. *New Mass Limit for White Dwarfs: Super-Chandrasekhar Type Ia Supernova as a New Standard Candle*. Physical Review Letters, **110**(7):071102 (2013). doi:10.1103/PhysRevLett.110.071102.
- [16] U. Das y B. Mukhopadhyay. *Violation of Chandrasekhar Mass Limit: the Exciting Potential of Strongly Magnetized White Dwarfs*. International Journal of Modern Physics D, **21**:1242001 (2012). doi:10.1142/S0218271812420011.
- [17] U. Das y B. Mukhopadhyay. *Maximum mass of stable magnetized highly super-Chandrasekhar white dwarfs: stable solutions with varying magnetic fields*. J. Cosmology Astropart. Phys., **6**:050 (2014). doi:10.1088/1475-7516/2014/06/050.
- [18] J. G. Coelho, R. M. Marinho, M. Malheiro, R. Negreiros, D. L. Cáceres, J. A. Rueda, y R. Ruffini. *Dynamical Instability of White Dwarfs y Breaking of Spherical Symmetry Under the Presence of Extreme Magnetic Fields*. ApJ, **794**:86 (2014). doi:10.1088/0004-637X/794/1/86.
- [19] D. M. Paret, J. Horvath, y A. P. Martínez. *Maximum mass of magnetic white dwarfs*. RAA, **15**:1735–1741 (2015). doi:10.1088/1674-4527/15/10/010.
- [20] D. Manreza Paret. *Efectos del campo magnético en las Ecuaciones de Estado y de Estructura de Objetos Compactos*. Tesis de Doctorado, Facultad de Física, Universidad de La Habana (2014).
- [21] A. Broderick, M. Prakash, y J. M. Lattimer. *The Equation of State of Neutron Star Matter in Strong Magnetic Fields*. ApJ, **537**:351–367 (2000). doi:10.1086/309010.
- [22] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, y J. Tonry. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe y a Cosmological Constant*. AJ, **116**:1009–1038 (1998). doi:10.1086/300499.
- [23] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, y T. S. C. Project. *Measurements of Ω y Λ from 42 High-Redshift Supernovae*. ApJ, **517**:565–586 (1999). doi:10.1086/307221.

- [24] P.-E. Tremblay, H.-G. Ludwig, M. Steffen, y B. Freytag. *Spectroscopic analysis of DA white dwarfs with 3D model atmospheres*. *A&A*, **559**:A104 (2013). doi:10.1051/0004-6361/201322318.
- [25] M. Kilic, C. Allende Prieto, W. R. Brown, y D. Koester. *The Lowest Mass White Dwarf*. *ApJ*, **660**:1451–1461 (2007). doi:10.1086/514327.
- [26] S. O. Kepler, S. J. Kleinman, A. Nitta, D. Koester, B. G. Castanheira, O. Giovannini, A. F. M. Costa, y L. Althaus. *White dwarf mass distribution in the SDSS*. *MNRAS*, **375**:1315–1324 (2007). doi:10.1111/j.1365-2966.2006.11388.x.
- [27] J. C. Kemp, J. B. Swedlund, J. D. Landstreet, y J. R. P. Angel. *Discovery of Circularly Polarized Light from a White Dwarf*. *ApJ*, **161**:L77 (1970). doi:10.1086/180574.
- [28] G. P. Kuiper. *Two New White Dwarfs of Large Parallax*. *PASP*, **46**:287 (1934). doi:10.1086/124496.
- [29] J. R. P. Angel, J. Liebert, y H. S. Stockman. *The optical spectrum of hydrogen at 160-350 million gauss in the white dwarf GRW +70 deg 8247*. *ApJ*, **292**:260–266 (1985). doi:10.1086/163156.
- [30] J. L. Greenstein, R. J. W. Henry, y R. F. Oconnell. *Futher identifications of hydrogen in GRW +708247*. *ApJ*, **289**:L25–L29 (1985). doi:10.1086/184427.
- [31] D. T. Wickramasinghe y L. Ferrario. *A centered dipole model for the high field magnetic white dwarf GRW + 70 deg 8247*. *ApJ*, **327**:222–233 (1988). doi:10.1086/166184.
- [32] L. Ferrario, D. de Martino, y B. T. Gänsicke. *Magnetic White Dwarfs*. *Space Sci. Rev.*, **191**:111–169 (2015). doi:10.1007/s11214-015-0152-0.
- [33] L. Ferrario y D. T. Wickramasinghe. *White dwarf pairing functions*. In K. Werner y T. Rauch, editors, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1273 of *American Institute of Physics Conference Series*, (pages 378–383) (2010). doi:10.1063/1.3527845.
- [34] S. O. Kepler, S. J. Kleinman, A. Nitta, D. Koester, B. G. Castanheira, O. Giovannini, A. F. M. Costa, y L. Althaus. *White dwarf mass distribution in the SDSS*. *MNRAS*, **375**:1315–1324 (2007). doi:10.1111/j.1365-2966.2006.11388.x.
- [35] M. Camenzind. *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars y Black Holes*. *Astronomy y Astrophysics Library*. Springer Berlin Heidelberg (2007). ISBN 9783540499121.
- [36] V. Berestetskii, E. Lifshits, y L. Pitaevskii. *Teoría cuántica relativista*. *Curso de física teórica: parte 1-2*. Editorial Reverté (1981). ISBN 9788429140798.
- [37] K. Huang. *Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals*. Wiley (2008). ISBN 9783527617388.
- [38] M. Chaichian, S. S. Masood, C. Montonen, A. Perez Martinez, y H. Perez Rojas. *Quantum Magnetic Collapse*. *Physical Review Letters*, **84**:5261 (2000). doi:10.1103/PhysRevLett.84.5261.

-
- [39] R. Gonzalez Felipe, H. J. Mosquera Cuesta, A. Perez Martinez, y H. P. Rojas. *Quantum Instability of Magnetized Stellar Objects*. Chinese J. Astron. Astrophys., **5**:399–411 (2005). doi:10.1088/1009-9271/5/4/007.
- [40] E. J. Ferrer, V. de La Incera, J. P. Keith, I. Portillo, y P. L. Springsteen. *Equation of state of a dense y magnetized fermion system*. Phys. Rev. C, **82**(6):065802 (2010). doi:10.1103/PhysRevC.82.065802.
- [41] J. M. Lattimer y M. Prakash. *Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints*. Phys. Rep., **442**:109–165 (2007). doi:10.1016/j.physrep.2007.02.003.
- [42] E. S. Fradkin. *Methods of Green's functions in quantum field theory in quantum statistics*. In N. Y. Consultants Bureau, editor, *Quantum Field Theory and Hydrodynamics*, volume 29, (pages 1–131) (1967).
- [43] M. H. Johnson y B. A. Lippmann. *Motion in a Constant Magnetic Field*. Physical Review, **76**:828–832 (1949). doi:10.1103/PhysRev.76.828.
- [44] M. Abramowitz y I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards (1972).
- [45] J. Schwinger. *On gauge invariance y vacuum polarization*. Phys. Rev., **82**:664–679 (1951). doi:10.1103/PhysRev.82.664.
- [46] J. Ferrer, E. V. de la Incera, D. M. Paret, A. P. Martinez, and A. Sanchez. *Insignificance of the anomalous magnetic moment of charged fermions for the equation of state of a magnetized y dense medium*. Phys. Rev. D, **91**:085041 (2015). doi:10.1103/PhysRevD.91.085041.
- [47] S. Shapiro y S. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs y Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley (2008). ISBN 9783527617678.
- [48] C. J. Jog y R. A. Smith. *Mixed lattice phases in cold dense matter*. ApJ, **253**:839–841 (1982). doi:10.1086/159685.
- [49] N. Chamel, E. Molter, A. F. Fantina, y D. P. Arteaga. *Maximum strength of the magnetic field in the core of the most massive white dwarfs*. Phys. Rev. D, **90**:043002 (2014). doi:10.1103/PhysRevD.90.043002.
- [50] N. Chamel y A. F. Fantina. *Electron capture instability in magnetic y nonmagnetic white dwarfs*. Phys. Rev. D, **92**:023008 (2015). doi:10.1103/PhysRevD.92.023008.
- [51] G. Baym, C. Pethick, y P. Sutherland. *The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State y Stellar Models*. ApJ, **170**:299 (1971). doi:10.1086/151216.
- [52] C. W. Misner, K. S. Thorne, y J. A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman y Co. (1973).
- [53] A. Ulacia Rey. *Gravitational collapse y entropy of Black Holes with magnetic sources*. Tesis de Doctorado (2011).

- [54] S. Chandrasekhar. *The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity*. ApJ, **140**:417 (1964). doi:10.1086/147938.
- [55] J. M. Bardeen, K. S. Thorne, y D. W. Meltzer. *A Catalogue of Methods for Studying the Normal Modes of Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models*. ApJ, **145**:505 (1966). doi:10.1086/148791.
- [56] R. Gonzalez Felipe, A. Perez Martinez, H. Perez Rojas, y M. Orsaria. *Magnetized strange quark matter y magnetized strange quark stars*. Phys. Rev. C, **77**(1):015807 (2008). doi:10.1103/PhysRevC.77.015807.
- [57] I.-S. Suh y G. J. Mathews. *Mass-Radius Relation for Magnetic White Dwarfs*. ApJ, **530**:949–954 (2000). doi:10.1086/308403.
- [58] G. Vauclair, H. Schmidt, D. Koester, y N. Allard. *White dwarfs observed by the HIPPARCOS satellite*. A&A, **325**:1055–1062 (1997).
- [59] C. S. Trendafilova y S. A. Fulling. *Static solutions of Einstein's equations with cylindrical symmetry*. European Journal of Physics, **32**:1663–1677 (2011). doi:10.1088/0143-0807/32/6/020.
- [60] R. C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics, y Cosmology*. Oxford: Clarendon Press (1934).
- [61] D. M. Paret, J. Horvath, y A. P. Martinez. *Anisotropic stellar structure equations for magnetized stars* (2014).
- [62] G. Valyavin, D. Shulyak, G. A. Wade, K. Antonyuk, S. V. Zharikov, G. A. Galazutdinov, S. Plachinda, S. Bagnulo, L. F. Machado, M. Alvarez, D. M. Clark, J. M. Lopez, D. Hiriart, I. Han, Y.-B. Jeon, C. Zurita, R. Mujica, T. Burlakova, T. Szeifert, y A. Burenkov. *Suppression of cooling by strong magnetic fields in white dwarf stars*. Nature, **515**(7525):88–91 (2014).
- [63] V. Canuto y H.-Y. Chiu. *Quantum Theory of an Electron Gas in Intense Magnetic Fields*. Physical Review, **173**:1210–1219 (1968). doi:10.1103/PhysRev.173.1210.